La transformée de Fourier pour les espaces tordus sur un groupe réductif p-adique I. Le théorème de Paley-Wiener

Guy Henniart, Bertrand Lemaire

LA TRANSFORMÉE DE FOURIER POUR LES ESPACES TORDUS SUR UN GROUPE RÉDUCTIF $\mathfrak{p}$-ADIQUE I. LE THÉORÈME DE PALEY–WIENER

Guy Henniart & Bertrand Lemaire

Résumé. — Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif connexe défini sur un corps local non archimédien F. On pose $G = \boldsymbol{G}(F)$. Soit aussi θ un F–automorphisme de $\boldsymbol{G}$, et ω un caractère lisse de G. On s'intéresse aux représentations complexes lisses π de G telles que $\pi^\theta = \pi \circ \theta$ est isomorphe à $\omega\pi = \omega \otimes \pi$. Si π est admissible, en particulier irréductible, le choix d'un isomorphisme A de $\omega\pi$ sur π^θ (et d'une mesure de Haar sur G) définit une distribution $\Theta_\pi^A = \mathrm{tr}(\pi \circ A)$ sur G. La transformée de Fourier tordue associe à une fonction f sur G localement constante et à support compact, la fonction $(\pi, A) \mapsto \Theta_\pi^A(f)$ sur un groupe de Grothendieck adéquat. On décrit ici son image (théorème de Paley–Wiener), et l'on réduit la description de son noyau (théorème de densité spectrale) à un énoncé sur la partie discrète de la théorie.

Abstract. — Let $\boldsymbol{G}$ be a connected reductive group defined over a non–Archimedean local field F. Put $G = \boldsymbol{G}(F)$. Let θ be an F–automorphism of $\boldsymbol{G}$, and let ω be a smooth character of G. This paper is concerned with the smooth complex representations π of G such that $\pi^\theta = \pi \circ \theta$ is isomorphic to $\omega\pi = \omega \otimes \pi$. If π is admissible, in particular irreducible, the choice of an isomorphism A from $\omega\pi$ to π^θ (and of a Haar measure on G) defines a distribution $\Theta_\pi^A = \mathrm{tr}(\pi \circ A)$ on G. The twisted Fourier transform associates to a compactly supported locally constant function f on G, the function $(\pi, A) \mapsto \Theta_\pi^A(f)$ on a suitable Grothendieck group. Here we describe its image (Paley–Wiener theorem), and we reduce the description of its kernel (spectral density theorem) to a result on the discrete part of the theory.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 22E50.

Mots clefs. — corps local non archimédien, espace tordu, caractère tordu, transformée de Fourier , théorème de Paley–Wiener, théorème de densité spectrale.

1. Introduction

1.1. — Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, et soit $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F. Le groupe $G = \boldsymbol{G}(F)$ des points F–rationnels de $\boldsymbol{G}$, muni de la topologie donnée par F, est localement profini — en particulier localement compact — et unimodulaire. On appelle *représentation de* G, ou G*–module*, une représentation lisse de G à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Le choix d'une mesure de Haar dg sur G permet de définir, pour toute représentation admissible π de G, une distribution Θ_π sur G, c'est–à–dire une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{H}(G)$ des fonctions localement constantes et à support compact sur G : pour $f \in \mathcal{H}(G)$, l'opérateur $\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg$ sur l'espace de π est de rang fini, et l'on pose

$$\Theta_\pi(f) = \mathrm{tr}(\pi(f)).$$

Cette distribution Θ_π ne dépend que de la classe d'isomorphisme de π (et aussi du choix de dg). Notons $\mathcal{G}(G)$ le groupe de Grotendieck des représentations de longueur finie de G. Tout élément π de $\mathcal{G}(G)$ définit par linéarité une distribution Θ_π sur G.

Le théorème de Paley–Wiener (scalaire) prouvé dans **[BDK]** caractérise les applications $\mathbb{Z}$–linéaires de $\mathcal{G}(G)$ vers $\mathbb{C}$ qui sont de la forme $\pi \mapsto \Theta_\pi(f)$ pour une fonction $f \in \mathcal{H}(G)$. L'espace $\mathcal{H}(G)$ est muni d'un produit de convolution $*$, donné par

$$f * h(x) = \int_G f(g)h(g^{-1}x)dg.$$

Le noyau de l'application $f \mapsto (\pi \mapsto \Theta_\pi(f))$ contient le sous–espace $[\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G)]$ de $\mathcal{H}(G)$ engendré par les commutateurs $f * h - h * f$. Le théorème de densité spectrale affirme que ce noyau est égal à $[\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G)]$. Il a été démontré par Kazhdan dans [**K1**, appendix], via un argument local–global utilisant la formule des traces, donc valable seulement si F est de caractéristique nulle. Kazhdan a ensuite étendu son résultat au cas où F est de caractéristique non nulle [**K2**], par la méthode des corps proches en supposant G déployé. Notons que cette méthode est certainement valable sous des hypothèses moins restrictives, par exemple en supposant la caractéristique résiduelle grande par rapport au rang de G — voir les travaux récents de J.–L. Waldspurger sur le lemme fondamental —, mais cela reste à rédiger.

1.2. — On s'intéresse ici à la version « tordue » des résultats précédents. La torsion en question est donnée par un F–automorphisme de G, disons θ. On fixe aussi un caractère ω de G, c'est–à–dire un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$. Pour $f \in \mathcal{H}(G)$ et $x \in G$, on note ${}^x f$ la fonction $g \mapsto \omega(x)f(x^{-1}g\theta(x))$ sur G. La théorie de l'endoscopie tordue étudie les distributions D sur G qui, pour tout $f \in \mathcal{H}(G)$ et tout $x \in G$, vérifient $D({}^x f) = D(f)$.

Soit π une représentation irréductible de G telle que $\pi^\theta = \pi \circ \theta$ est isomorphe à $\omega\pi = \omega \otimes \pi$. Le choix d'un isomorphisme A de $\omega\pi$ sur π^θ définit comme plus haut une distribution $\Theta_\pi^A = \mathrm{tr}(\pi \circ A)$ sur G. Cette distribution Θ_π^A dépend bien sûr du choix de A (et aussi de celui de dg), et elle vérifie

$$\Theta_\pi^A({}^x f) = \Theta_\pi^A(f).$$

Pour décrire l'image et le noyau de l'application $f \mapsto (\pi \mapsto \Theta_\pi^A(f))$ comme dans le cas non tordu, il faut commencer par la définir ! On peut le faire de diverses manières, l'une d'elle étant la suivante. Soit $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G, \theta, \omega)$ le $\mathbb{C}$–espace vectoriel engendré par les paires (π, A) où π est une représentation de G de longueur finie telle que $\pi^\theta \simeq \omega\pi$ et A est un isomorphisme de $\omega\pi$ sur π^θ, modulo les relations :

- pour toute suite exacte $0 \to (\pi_1, A_1) \to (\pi_2, A_2) \to (\pi_3, A_3) \to 0$, i.e. une suite exacte de G-modules qui commute aux A_i, on a $(\pi_3, A_3) = (\pi_2, A_2) - (\pi_1, A_1)$;
- pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, on a $(\pi, \lambda A) = \lambda(\pi, A)$;

– pour tout entier $k > 1$ et toute paire (ρ, B) formée d'une représentation de longueur finie ρ de G telle que $\rho(k) \simeq \rho$ et d'un isomorphisme B de ρ sur $\rho(k)$, on a $\iota_k(\rho, B) = 0$.

Ci–dessus, $\iota_k(\rho, B)$ est la paire (π, A) définie par

$$\pi = \rho \oplus \rho(1) \oplus \cdots \oplus \rho(k-1), \quad A(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}) = (v_1, \ldots, v_{k-1}, B(v_0)),$$

où l'on a posé $\rho(i) = \omega_i^{-1}\rho^{\theta^i}$, ω_i désignant le caractère $g \mapsto w(g\theta(g)\cdots\theta^{i-1}(g))$ de G. Par construction, $\pi(1) = \omega^{-1}\pi^\theta$ est isomorphe à π et A est un isomorphisme de π sur $\pi(1)$.

L'application $f \mapsto ((\pi, A) \mapsto \Theta_\pi^A(f))$ définit un morphisme $\mathbb{C}$–linéaire

$$\mathcal{H}(G) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G, \theta, \omega)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G, \theta, \omega), \mathbb{C}).$$

C'est ce morphisme que l'on étudie dans cet article.

1.3. — Plutôt que de fixer le F–automorphisme θ de $\boldsymbol{G}$, il convient de travailler avec un $\boldsymbol{G}$–espace algébrique tordu $\boldsymbol{G}^\natural$ tel que l'ensemble $G^\natural = \boldsymbol{G}^\natural(F)$ de ses points F–rationnels est non vide. Le choix d'un point–base $\delta_1 \in G^\natural$ définit un F–automorphisme $\theta = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta_1)$ de $\boldsymbol{G}$ qui permet d'identifier $G^\natural$ au G-espace topologique tordu $G\theta$ (cf. 2.2). On appelle *ω–représentation de $G^\natural$*, ou *$(G^\natural, \omega)$–module*, la donnée d'une paire (π, A) formée d'une représentation π de G telle que $\pi(1) \simeq \pi$ et d'un isomorphisme A de π sur $\pi(1)$ (on renvoie à 2.3 pour une définition plus intrinsèque). On note Π la paire (π, A), et l'on pose $\Pi^\circ = \pi$. Les ω–représentations de $G^\natural$ s'organisent naturellement en une catégorie abélienne, et $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G, \theta, \omega)$ est un quotient du groupe de Grothendieck des ω–représentations Π de $G^\natural$ telles que la représentation Π° de G sous–jacente est de longueur finie.

Toute ω–représentation Π de $G^\natural$ telle que Π° est admissible définit comme plus haut une distribution Θ_Π sur $G^\natural$, c'est–à–dire une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{H}(G^\natural)$ des fonctions localement constantes et à support compact sur $G^\natural$: pour $\phi \in \mathcal{H}(G^\natural)$, on pose

$$\Theta_\Pi(\phi) = \mathrm{tr}(\Pi(\phi)),$$

où $\Pi(\phi)$ est l'opérateur $\int_{G^\natural} \phi(\delta)\Pi(\delta)d\delta$ sur l'espace de Π (il est de rang fini). Ici $d\delta$ est la mesure G–invariante sur $G^\natural$ image de dg par l'homéomorphisme $g \mapsto g \cdot \delta_1$. On a donc

$$\Theta_\Pi(\phi) = \Theta_{\Pi^\circ}^{\Pi(\delta_1)}(\phi^\circ),$$

où ϕ° est la fonction $g \mapsto \phi(g \cdot \delta_1)$ sur G. Traduite en ces termes, la transformée de Fourier pour $(G^\natural, \omega)$ est le morphisme $\mathbb{C}$–linéaire

$$\mathcal{H}(G^\natural) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega), \mathbb{C})$$

déduit par linéarité de l'application $\phi \mapsto (\Pi \mapsto \Theta_\Pi(\phi))$.

Notre résultat principal (énoncé en 3.1) est une description de ce morphisme : le théorème de « Paley–Wiener tordu » décrit son image, et le théorème de « densité spectrale tordue » son noyau. En fait la densité spectrale en question est plutôt une conséquence de la description du noyau : l'espace $\mathcal{H}(G^\natural)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{H}(G)$–bimodule, et le sous–espace $[\mathcal{H}(G^\natural), \mathcal{H}(G)]_\omega$ de $\mathcal{H}(G^\natural)$ engendré par les fonctions $\phi * f - \omega f * \phi$ est clairement contenu dans le noyau. Le théorème de densité spectrale tordue dit que cette inclusion est une égalité : si une fonction ϕ annule toutes les traces Θ_Π, où Π parcourt les ω–représentations de $G^\natural$ telles que Π° est irréductible, alors elle est dans $[\mathcal{H}(G^\natural), \mathcal{H}(G)]_\omega$. Cela implique en particulier qu'elle annule toutes les distributions $\mathfrak{D}$ sur $G^\natural$ telles que $\mathfrak{D}({}^x\phi') = \mathfrak{D}(\phi')$ pour tout $\phi' \in \mathcal{H}(G^\natural)$ et tout $x \in G$, où l'on a posé ${}^x\phi'(\delta) = \omega(x)\phi'(x^{-1} \cdot \delta \cdot x)$.

Dans cet article, on démontre la surjectivité dans le théorème de 3.1 (théorème de Paley–Wiener tordu). La preuve de l'injectivité (théorème de densité spectrale tordue), beaucoup plus longue que prévue, est seulement ébauchée ici, et sera terminée ailleurs [**HL**].

1.4. — Le théorème de Paley–Wiener tordu a été démontré par Rogawski dans [**R**], pour θ d'ordre fini et $\omega = 1$. La preuve est essentiellement celle de [**BDK**], adaptée au cas tordu. Sous les mêmes hypothèses ($\theta^l = \mathrm{id}$ et $\omega = 1$), Flicker a décrit dans [**F**] une preuve locale du théorème de densité spectrale, utilisant la méthode de « dévissage » de Bernstein. À notre connaissance, cette méthode n'a jamais été rédigée par Bernstein. Elle est particulièrement bien expliquée par Dat (dans le cas non tordu) dans son article sur le K_0 [**D**]. Ce dernier permet d'ailleurs de reconstruire les arguments manquants dans [**F**].

La démonstration proposée ici et dans [**HL**] est entièrement locale, et aussi entièrement spectrale puisqu'aucun recours aux intégrales orbitales n'est nécessaire. Comme dans [**F**], on traite de façon semblable la surjectivité (Paley–Wiener) et l'injectivité (densité spectrale). Le théorème de Paley–Wiener est démontré ici en adaptant au cas tordu les arguments de [**BDK**]. Le théorème de densité spectrale sera (complètement) démontré dans [**HL**] grâce la méthode de dévissage de Bernstein.

Par induction parabolique et récurrence sur la dimension de G, on ramène l'étude de la transformée de Fourier à la partie « discrète » de $(G^\natural, \omega)$. Notant $\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural, \omega)$ le sous–espace de $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) = \mathcal{H}(G^\natural)/[\mathcal{H}(G^\natural), \mathcal{H}(G)]_\omega$ engendré par les fonctions « ω–cuspidales », et $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural, \omega)^*$ l'espace des formes linéaires « discrètes » sur $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ — ces notions sont les avatars tordus des notions habituelles, cf. 1.6 —, la transformée de Fourier pour $(G^\natural, \omega)$ se restreint en un morphisme

$$\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural, \omega) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural, \omega)^*.$$

Une bonne partie du présent article est consacrée à l'étude de ce morphisme, précisément à la description de son image, son injectivité étant démontrée dans [**HL**]. La description (image et noyau) de la transformée de Fourier sur l'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ tout entier s'en déduit ensuite aisément. Notons que si le centre de $G^\natural$ est compact — cas particulier auquel il est en principe toujours possible de se ramener en fixant le caractère central — le morphisme ci–dessus est un isomorphisme. Notons aussi que dans le cas non tordu, cet isomorphisme a déjà été établi en caractéristique nulle par Kazhdan [**K1**, theorem B].

1.5. — Le théorème de Paley–Wiener démontré ici a déjà été utilisé par J.-L. Waldspurger pour établir la formule des traces locale tordue en caractéristique nulle [**W**]. Notons que dans ce même papier, l'auteur démontre — toujours en caractéristique nulle, et sous l'hypothèse où la restriction de θ au centre $Z(\boldsymbol{G})$ de $\boldsymbol{G}$ est d'ordre fini — un théorème de densité, appelé « théorème 0 » de Kazhdan [**W**, 5.5], qui (en caractéristique nulle) est équivalent au théorème de densité spectrale établi ici. Précisément, Waldspurger (dans [**W**]) commence par établir une première formule des traces locale tordue *non–invariante*, formule de laquelle il déduit le « théorème 0 » de Kazhdan. Ensuite il utilise le théorème de Paley–Wiener — en particulier l'existence de pseudo–coefficients — pour rendre cette première formule invariante.

1.6. — Décrivons brièvement les points–clés de la démonstration du théorème de Paley–Wiener tordu. On fixe une famille $\mathcal{P}(G^\natural)$ de sous–espaces paraboliques standard $P^\natural$ de $G^\natural$ munis d'une décomposition de Levi standard $P^\natural = M_P^\natural \cdot U_P$; ici P désigne le sous–groupe parabolique de G sous–jacent à $P^\natural$, et U_P son radical unipotent. Pour $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, les versions tordues des foncteurs induction parabolique et restriction de Jacquet normalisés définissent des morphismes $\mathbb{C}$–linéaires

$${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega), \quad {}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega).$$

Notons $\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega)$ le sous–espace de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ engendré par les ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega))$ pour $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ distinct de $G^\natural$, et posons

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)=\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)/\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega).$$

Une forme linéaire sur $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ est dite « discrète » si elle s'annule sur $\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega)$. Une ω–représentation Π de $G^\natural$ telle que Π° est irréductible est dite « discrète » si son image dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$ n'est pas nulle. On note $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$ le sous–ensemble de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ formé des ω–représentations discrètes de $G^\natural$. Notons que la décomposition

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)=\langle\Pi:\Pi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)\rangle+\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega)$$

n'est en général pas une somme directe.

Pour $\phi\in\mathcal{H}(G^\natural)$ et $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$, on a défini dans [**L2**, 5.9] le terme constant tordu ${}^\omega\phi_{P^\natural,K}\in\mathcal{H}(M_P^\natural)$ relatif à un sous–groupe compact maximal spécial K de G choisi de manière convenable (en bonne position par rapport aux sous–groupes paraboliques standard de G, cf. 4.7). On dit que ϕ est « ω–cuspidale » si pour tout $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ distinct de $G^\natural$, l'image de ${}^\omega\phi_{P^\natural,K}$ dans $\overline{\mathcal{H}}(M_P^\natural,\omega)$ est nulle. D'après l'analogue tordu de la formule de Van Dijk pour les traces des représentations induites [**L2**, théo.], si ϕ est ω–cuspidale alors $\Theta_\Pi(\phi)=0$ pour tout $\Pi\in\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega)$. D'ailleurs si l'on admet le théorème de densité spectrale tordue pour tous les sous–espaces de Levi propres de $G^\natural$, la réciproque est vraie aussi. La transformée de Fourier induit donc bien un morphisme

$$\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)\to\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)^*.$$

On démontre en 4.9 que le théorème principal (3.1) se ramène à un énoncé analogue sur la partie discrète de la théorie (4.8), c'est–à–dire à la description de l'image et à l'injectivité du morphisme ci–dessus.

1.7. — Décrivons l'image du morphisme précédent. L'application $(k,\pi)\mapsto\pi(k)$ induit une action de $\mathbb{Z}$ sur la plupart des objets reliés à la théorie des représentations de G :

– l'ensemble $\mathrm{Irr}(G)$ des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G ;
– l'ensemble $\Theta(G)=\coprod_{\mathfrak{s}}\Theta(\mathfrak{s})$ des classes de G–conjugaison de paires cuspidales de G, où $\mathfrak{s}$ parcourt l'ensemble des classes d'équivalence inertielle de paires cuspidales de G et $\Theta(\mathfrak{s})$ désigne la variété complexe associée à $\mathfrak{s}$ (cf. 2.15) ;
– le centre $\mathfrak{Z}(G)$ de la catégorie des G–modules ;
– etc.

L'application caractère infinitésimal

$$\theta_G:\mathrm{Irr}(G)\to\Theta(G)$$

est ainsi $\mathbb{Z}$–équivariante. Pour chaque classe d'équivalence inertielle $\mathfrak{s}$, on note $\Theta_{G^\natural,\omega}^{\mathrm{dis}}(\mathfrak{s})$ le sous–ensemble de $\Theta(\mathfrak{s})$ formé des $\theta_G(\Pi^\circ)$ pour une ω–représentation discrète Π de $G^\natural$. Remarquons que pour que $\Theta_{G^\natural,\omega}^{\mathrm{dis}}(\mathfrak{s})$ soit non vide, il faut que la variété $\Theta(\mathfrak{s})$ soit $\mathbb{Z}$–stable. Comme dans [**BDK**], on montre (en 5.3–5.5) la

Proposition. — *L'ensemble $\Theta_{G^\natural,\omega}^{\mathrm{dis}}(\mathfrak{s})$ est une partie constructible de $\Theta(\mathfrak{s})$.*

Notons $\mathfrak{P}(G^\natural)$ le groupe — algébrique, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ — des caractères non ramifiés de G qui sont θ–stables (il ne dépend pas du choix de $\delta_1\in G^\natural$), et posons $d(G^\natural)=\dim\mathfrak{P}(G^\natural)$. Comme dans loc. cit., on en déduit (en 5.2) le

Corollaire. — *L'ensemble $\Theta_{G^\natural,\omega}^{\mathrm{dis}}(\mathfrak{s})$ est union finie de $\mathfrak{P}(G^\natural)$–orbites.*

Soit aussi $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$ l'ensemble des $(\omega = 1)$–représentations du G/G^1–espace tordu $G^\natural/G^1$, où $G^1 \subset G$ désigne le groupe engendré par les sous–groupes compacts de G. L'ensemble $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$, identifié à un ensemble de fonctions $G^\natural \rightarrow \mathbb{C}^\times$, est muni d'une structure de groupe, qui en fait une extension (algébrique, scindée) de $\mathfrak{P}(G^\natural)$ par $\mathbb{C}^\times$. On en déduit la description de l'image du morphisme $\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)^*$. C'est l'espace, disons $\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$, des formes linéaires φ sur $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$ vérifiant :

- il existe un ensemble *fini* $\mathfrak{S}$ de classes d'équivalence inertielle $\mathfrak{s}$ tel que pour tout $\Pi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$, on a $\varphi(\Pi) = 0$ si $\theta_G(\Pi^\circ) \in \Theta(G) \smallsetminus \coprod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} \Theta(\mathfrak{s})$;
- pour tout $\Pi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$, l'application $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural) \rightarrow \mathbb{C}$, $\Psi \mapsto \varphi(\Psi\Pi)$ est une fonction *régulière* sur la variété $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$.

1.8. — L'article s'organise comme suit.

Dans la section 2, on reprend la théorie des représentations de G dans le cas tordu. Il s'agit essentiellement de suivre l'action de $\mathbb{Z}$ — donnée par $(k,\pi) \mapsto \pi(k)$ — sur les principaux objets de la théorie. Le cadre choisi est celui des ω–représentations de $G^\natural$, qui sont reliées aux représentations tordues de G via le foncteur d'oubli $\Pi \mapsto \Pi^\circ$. Parmi les résultats obtenus dans ce cadre tordu, signalons : le lemme géométrique, le théorème du quotient de Langlands, la description du centre de Berstein.

Le résultat principal est énoncé dans la section 3. On montre aussi comment la description de l'image de la transformée de Fourier implique la « variante tempérée » du théorème de Paley–Wiener, c'est–à–dire la version en termes des ω_{u}–représentations tempérées des sous–espaces de Levi de $G^\natural$; où ω_{u} est le caractère unitaire $\omega|\omega|^{-1}$ de G.

Dans la section 4, on ramène l'étude de la transformée de Fourier à celle de sa restriction à la partie « discrète » des représentations.

Dans la section 5, on démontre le théorème de Paley–Wiener dans le cas discret. Pour cela on adapte au cas tordu les techniques de [**BDK**]. Comme dans loc. cit., le point–clé consiste à montrer que pour toute classe d'équivalence inertielle $\mathfrak{s}$ dans G, l'ensemble $\Theta_{G^\natural,\omega}^{\mathrm{dis}}(\mathfrak{s})$ est une partie constructible de $\Theta(\mathfrak{s})$.

1.9. — Signalons brièvement certaines hypothèses admises au cours de l'article.

En 2.2, on fixe un point–base $\delta_1 \in G^\natural$, et l'on pose $\theta = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta_1)$.

En 2.8, on fixe une mesure de Haar dg sur G et l'on note $d\delta$ la mesure de Haar sur $G^\natural$ image de dg par l'isomorphisme $G \rightarrow G^\natural$, $g \mapsto g\cdot\delta$ pour un (resp. pour tout) $\delta \in G^\natural$.

En 2.10, on fixe un sous–espace parabolique minimal $P_\circ^\natural$ de $G^\natural$, et une décomposition de Levi $P_\circ^\natural = M_\circ^\natural \cdot U_\circ$. Le groupe $P_\circ$ sous–jacent à $P_\circ^\natural$ est un sous–groupe parabolique minimal de G, et $P_\circ = M_\circ U_\circ$ (décomposition de Levi) où $M_\circ$ est le groupe sous–jacent à $M_\circ^\natural$.

À partir de 2.10, on suppose que δ_1 appartient à $M_\circ^\natural$. La paire parabolique minimale $(P_\circ, M_\circ)$ de G est donc θ–stable.

À partir de 2.19, on suppose que θ stablise un sous–groupe d'Iwahori de G en bonne position par rapport à $(P_\circ, M_\circ)$.

En 4.7, on fixe un sous–groupe compact maximal spécial $K_\circ$ de G en bonne position par rapport à toute paire parabolique de G contenant $(P_\circ, M_\circ)$. Ce groupe $K_\circ$ n'est pas supposé θ–stable. À partir de 4.7, on suppose que toutes les mesures de Haar utilisées sont celles normalisées par $K_\circ$.

2. Représentations des espaces tordus

2.1. Conventions. — Pour éviter de tomber dans les pièges habituels, on fixe un *univers* de Grothendieck assez grand $\mathfrak{U}$, cf. [**G**, chap. I]. Toutes les catégories considérées dans cet article sont implicitement des $\mathfrak{U}$–catégories : les objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ sont les éléments d'un ensemble qui appartient à l'univers $\mathfrak{U}$, noté $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, et pour M, $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, les flèches $M \to N$ dans $\mathcal{C}$ sont les éléments d'un ensemble qui appartient lui aussi à l'univers $\mathfrak{U}$, noté $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)$. En particulier, on appelle simplement « ensemble » un ensemble qui appartient à l'univers $\mathfrak{U}$. Toutes les conventions de loc. cit. sont adoptées ici. Par exemple, quand on parle de *système inductif* (resp. *projectif*) d'objets d'une catégorie, on suppose implicitement que ce système est indexé par un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$; idem pour les sommes directes et les produits directs.

Sauf mention expresse du contraire, les modules sur un anneau A sont des modules *à gauche*. Rappelons que tout anneau A possède une unité, disons 1_A, et que tout A–module X vérifie $1_A \cdot x = x$, $x \in X$.

2.2. Les données. — Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien (de caractéristique quelconque). On note $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de F, et κ le corps résiduel $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$.

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F, et soit $\boldsymbol{G}^\natural$ un $\boldsymbol{G}$–espace algébrique tordu (au sens de J.-P. Labesse) lui aussi défini sur F. Rappelons que $\boldsymbol{G}^\natural$ est une variété algébrique affine définie sur F, munie :

– d'une action algébrique de $\boldsymbol{G}$ à gauche définie sur F

$$\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}^\natural \to \boldsymbol{G}^\natural,\ (g,\delta) \mapsto g \cdot \delta$$

telle que pour tout $\delta \in \boldsymbol{G}^\natural$, l'application $\boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}^\natural$, $g \mapsto g \cdot \delta$ est un isomorphisme de variétés algébriques ;

– d'une application

$$\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural} : \boldsymbol{G}^\natural \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{G})$$

où $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{G})$ désigne le groupe des automorphismes algébriques de $\boldsymbol{G}$, telle que pour tout $g \in \boldsymbol{G}$ et tout $\delta \in \boldsymbol{G}^\natural$, on a

$$\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(g \cdot \delta) = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(g) \circ \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta).$$

Cela munit $\boldsymbol{G}^\natural$ d'une action algébrique de $\boldsymbol{G}$ à droite définie sur F, donnée par

$$\boldsymbol{G}^\natural \times \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}^\natural,\ (\delta, g) \mapsto \delta \cdot g = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta)(g) \cdot \delta.$$

On suppose que l'ensemble $G^\natural = \boldsymbol{G}^\natural(F)$ des points F–rationnels de $\boldsymbol{G}^\natural$ est non vide, et l'on munit $G = \boldsymbol{G}(F)$ et $G^\natural$ de la topologie $\mathfrak{p}$–adique, ce qui fait de $G^\natural$ un G–espace topologique tordu, cf. [**L2**, 2.4]. La donnée de l'espace topologique tordu $(G, G^\natural)$ équivaut à celle d'un groupe topologique $\mathbb{Z}$–gradué $\mathcal{G} = \coprod_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_k$ tel que $\mathcal{G}_0 = G$ et $\mathcal{G}_1 = G^\natural$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{G}_k$ est un G–espace topologique tordu, et le groupe des points F–rationnels d'un $\boldsymbol{G}$–espace algébrique tordu $\boldsymbol{G}_k$ défini sur F. Les $\boldsymbol{G}_k$ sont reliés entre eux par des F–morphismes de transition

$$\varphi_{k,k'} : \boldsymbol{G}_k \times \boldsymbol{G}_{k'} \to \boldsymbol{G}_{k+k'}$$

vérifiant

$$\varphi_k(g \cdot \gamma, g' \cdot \gamma') = g\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}_k}(\gamma)(g') \cdot \varphi_{k,k'}(\gamma, \gamma')$$

et

$$\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}_{k+k'}}(\varphi_{k,k'}(\gamma,\gamma')) = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}_k}(\gamma) \circ \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}_{k'}}(\gamma').$$

Pour $k' = -k$, on dispose d'un F–morphisme « inverse »

$$\boldsymbol{G}_k \to \boldsymbol{G}_{-k},\ \gamma \mapsto \gamma^{-1}$$

donné par

$$\varphi_{k,-k}(\gamma, \gamma^{-1}) = 1_G.$$

On a donc $\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}_{-k}}(\gamma^{-1}) = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}_k}(\gamma)^{-1}$. Ces données définissent un F–schéma en groupes lisse de composantes connexes les $\boldsymbol{G}_k$, dont $\mathcal{G}$ est le groupe des points F–rationnels.

Fixons un point–base $\delta_1 \in G^\natural$, et notons θ le F–automorphisme $\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta_1)$ de $\boldsymbol{G}^\natural$. Le sous–ensemble $G\theta = G \rtimes \theta$ de $G \rtimes \mathrm{Aut}_F(\boldsymbol{G})$ est naturellement muni d'une structure de G–espace topologique tordu (cf. la remarque 1 de [**L2**, 3.4]) ; ici $\mathrm{Aut}_F(\boldsymbol{G})$ désigne le groupe des F–automorphismes algébriques de G. On peut bien sûr identifier $G^\natural$ à $G\theta$ via l'application $g \cdot \delta_1 \mapsto g\theta$, mais on préfère ne pas le faire car cette identification n'est pas canonique (en général elle dépend du choix de δ_1, cf. la remarque 3 de loc. cit.).

On fixe aussi un caractère ω de $G = \boldsymbol{G}(F)$, c'est–à–dire un morphisme continu de G dans $\mathbb{C}^\times$. Notons $C(\boldsymbol{G})$ la composante neutre du centre $Z(\boldsymbol{G})$ de $\boldsymbol{G}$. C'est un tore défini sur F.

Remarque. — La restriction de θ à $C(\boldsymbol{G})$ ne dépend pas du choix de δ_1, et on ne suppose pas qu'elle est d'ordre fini. En d'autres termes, on ne suppose pas que $\boldsymbol{G}^\natural$ est isomorphe à une composante connexe d'un groupe algébrique affine. On ne suppose pas non plus que ω est unitaire. ■

2.3. ω–représentations de $G^\natural$. — Pour un groupe topologique totalement discontinu H, on appelle *représentation de H*, ou *H–module*, une représentation lisse de H à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel complexe. Les représentations de H forment une catégorie abélienne, notée $\mathfrak{R}(H)$. On note $\mathrm{Irr}(H)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de H.

On s'intéresse aux représentations π de G telles que $\omega\pi = \omega \otimes \pi$ est isomorphe à $\pi^\theta = \pi \circ \theta$. Si π est irréductible, alors d'après le lemme de Schur, l'espace $\mathrm{Hom}_G(\omega\pi, \pi^\theta)$ des opérateurs d'entrelacement entre $\omega\pi$ et π^θ est de dimension 1, mais en général il n'y a pas de vecteur privilégié dans cet espace — sauf si le groupe $\boldsymbol{G}$ est quasi–déployé sur F, mais même dans ce cas il faut faire des choix. On a donc intérêt à travailler dans une catégorie de représentations englobant cet espace, par exemple celle des ω–représentations (lisses) de $G^\natural$ introduite dans [**L2**, 2.6].

Une *ω–représentation de $G^\natural$* — ou *$(G^\natural, \omega)$–module* —, est la donnée d'une représentation (π, V) de G et d'une application $\Pi : G^\natural \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ telle que, pour tout $\delta \in G^\natural$ et tous $x, y \in G$, on a

$$\Pi(x \cdot \delta \cdot y) = \omega(y)\pi(x) \circ \Pi(\delta) \circ \pi(y).$$

Pour $x \in G$ et $\delta \in G^\natural$, on a

$$\pi(x) = \Pi(x \cdot \delta) \circ \Pi(\delta)^{-1} = \omega(x)^{-1}\Pi(\delta)^{-1} \circ \Pi(\delta \cdot x).$$

La représentation π est déterminée par Π, et notée Π° comme dans loc. cit. Remarquons que l'opérateur $A = \Pi(\delta_1)$ est un isomorphisme de $\omega\pi$ sur π^θ. L'espace d'une ω–représentation Π de $G^\natural$, c'est–à–dire celui de la représentation Π° de G sous–jacente, est noté $V_\Pi = V_{\Pi^\circ}$.

Les ω–représentations de $G^\natural$ s'organisent naturellement en une catégorie, notée $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$. Un morphisme u entre deux ω–représentations Π et Π' de $G^\natural$ est une application $\mathbb{C}$–linéaire $u : V_\Pi \to V_{\Pi'}$ telle que $u \circ \Pi(\delta) = \Pi'(\delta) \circ u$ pour tout $\delta \in G^\natural$ — de manière équivalente, u est un morphisme entre Π° et Π'° tel que $u \circ \Pi(\delta_1) = \Pi'(\delta_1) \circ u$. L'application $\Pi \mapsto \Pi^\circ$ définit un foncteur d'oubli de $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$ dans $\mathfrak{R}(G)$, et ce foncteur est fidèle. Notons que s'il existe une ω–représentation Π de $G^\natural$ telle que Π° est irréductible, alors le caractère ω est trivial sur le centre $Z^\natural = Z(G^\natural)$ de $G^\natural$, défini par

$$Z^\natural = \{z \in Z(G) : \theta(z) = z\}.$$

En d'autres termes, si $\omega|_{Z^\natural} \neq 1$ alors la théorie qui nous intéresse ici est vide.

On a des notions évidentes de sous–ω–représentation (resp. de ω–représentation quotient) d'une ω–représentation de $G^\natural$, et de suite exacte courte de ω–représentations de $G^\natural$ (cf. loc. cit.). Si u est un morphisme entre deux ω–représentations Π et Π' de $G^\natural$, le noyau $\ker u$ et l'image $\mathrm{Im}\, u$ sont des sous–ω–représentations de Π et Π' respectivement, et l'on a la suite exacte courte de ω–représentations de $G^\natural$:

$$0 \to \ker u \to \Pi \to \Pi'/\mathrm{Im}\, u \to 0.$$

Cela fait de $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$ une catégorie abélienne.

Une ω–représentation Π de $G^\natural$ est dite *irréductible* si V_Π est l'unique sous–espace non nul $G^\natural$–stable de V_Π, et *G–irréductible* (ou *fortement irréductible* [**L2**]) si la représentation Π° de G est irréductible. On note $\mathrm{Irr}(G^\natural, \omega)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de ω–représentations irréductibles de G, et $\mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ le sous–ensemble de $\mathrm{Irr}(G^\natural, \omega)$ formé des ω–représentations qui sont G–irréductibles.

On a une action naturelle de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathrm{Irr}(G^\natural, \omega)$, notée

$$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Irr}(G^\natural, \omega) \to \mathrm{Irr}(G^\natural, \omega),\ (\lambda, \Pi) \mapsto \lambda \cdot \Pi.$$

Cette action stabilise $\mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$, et le foncteur d'oubli $\Pi \mapsto \Pi^\circ$ induit une application injective

$$\mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)/\mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathrm{Irr}(G)$$

d'image le sous–ensemble $\mathrm{Irr}_{G^\natural, \omega}(G)$ de $\mathrm{Irr}(G)$ formé des π tels que $\omega^{-1}\pi^\theta = \pi$.

2.4. Les représentations $\pi(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. — Si π est une représentation de G, pour chaque entier $k \geq 1$, on note ω_k le caractère de G défini par

$$\omega_k = \omega \circ \mathcal{N}_{\theta,k}, \quad \mathcal{N}_{\theta,k}(x) = x\theta(x) \cdots \theta^{k-1}(x), \quad x \in G,$$

et $\pi(k)$ la représentation de G définie par

$$\pi(k) = \omega_k^{-1}\pi^{\theta^k}.$$

Le caractère ω_k ne dépend pas du choix du choix du point–base δ_1, alors que (contrairement à ce que la notation pourrait faire croire) la représentation $\pi(k)$ en dépend. Pour $k,\, k' \geq 1$, on a $\pi(k)(k') = \pi(k+k')$. Pour chaque entier $k \geq 1$, notons $\pi(-k)$ la représentation de G telle que $\pi(-k)(k) = \pi$. Précisément, on a $\pi(-k) = \omega_{-k}^{-1}\pi^{\theta^{-k}}$ où ω_{-k} est le caractère de G défini par

$$\omega_{-k} = \omega_k^{-1} \circ \theta^{-k} = \omega^{-1} \circ \theta^{-1} \circ \mathcal{N}_{\theta^{-1},k}.$$

On vérifie que $\pi(k)(-k) = \pi$. Par suite posant $\pi(0) = \pi$, on a

$$\pi(k)(k') = \pi(k+k'), \quad k,\, k' \in \mathbb{Z}.$$

On l'a dit plus haut, la représentation $\pi(k)$ dépend du choix du point–base δ_1. En effet, remplacer δ_1 par $\delta_1' = x \cdot \delta_1$ pour un $x \in G$ revient à remplacer θ par le F–automorphisme $\theta' = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(x) \circ \theta$ de $\boldsymbol{G}$, et pour chaque entier $k \geq 1$, à remplacer $\pi(k)$ par

$$\omega_k^{-1}\pi^{\theta'^k} = \omega_k^{-1} \otimes (\pi \circ \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(\mathcal{N}_{\theta,k}(x)) \circ \theta^k),$$

qui est isomorphe à $\pi(k)$, et $\pi(-k)$ par

$$\omega_{-k}^{-1}\pi^{\theta'^{-k}} = \omega_{-k}^{-1} \otimes (\pi \circ \theta^{-k} \circ \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(\mathcal{N}_{\theta,k}(x)^{-1})),$$

qui est isomorphe à $\pi(-k)$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $\pi(k)$ ne dépend donc à isomorphisme près que de $G^\natural$, de ω, et de la classe d'isomorphisme de π.

2.5. Le foncteur ι_k pour $k \geq 1$. — Soit un entier $k \geq 1$. Pour $\delta \in \boldsymbol{G}^\natural$, on définit comme en 2.4 une application $\mathcal{N}_{\delta,k} = \mathcal{N}_{\tau,k} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$, $\tau = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(\delta)$: pour $x \in \boldsymbol{G}$, on pose

$$\mathcal{N}_{\delta,k}(x) = x\tau(x)\cdots\tau^{k-1}(x).$$

L'application $\mathcal{N}_{\delta,k}$ ainsi définie est un morphisme de variétés algébriques, et si τ est défini sur F (e.g. si $\delta \in G^\natural$) alors $\mathcal{N}_{\delta,k}$ l'est aussi.

Le $\boldsymbol{G}$–espace algébrique tordu $\boldsymbol{G}^\natural$ est muni d'un F–morphisme de variétés algébriques

$$\boldsymbol{G}^\natural \to \boldsymbol{G}_k,\ \delta \mapsto \delta^k$$

défini comme suit : on pose $\delta^1 = \delta$ et $\delta^k = \varphi_{1,k-1}(\delta, \delta^{k-1})$ si $k > 1$. Pour $\delta \in \boldsymbol{G}^\natural$ et $g \in \boldsymbol{G}$, on a

$$(g \cdot \delta)^k = \mathcal{N}_{\delta,k}(g) \cdot \delta^k,$$

et si $k > 1$, on a

$$\delta^{k-1} = \varphi_{k,-1}(\delta^k, \delta^{-1}) = \varphi_{-1,k}(\delta^{-1}, \delta^k).$$

Le choix d'un point–base δ_1 de $G^\natural$ fournit un point–base δ_k de $\mathcal{G}_k$: on pose

$$\delta_k = (\delta_1)^k.$$

On définit comme suit un foncteur

$$\iota_k : \mathfrak{R}(\mathcal{G}_k, \omega_k) \to \mathfrak{R}(G^\natural, \omega).$$

Pour une ω_k–représentation Σ de $\mathcal{G}_k$, on note $\iota_k(\Sigma) = \Pi$ la ω–représentation de $G^\natural$ définie par :

– la représentation Π° de G sous–jacente à Π est $\oplus_{i=0}^{k-1}\Sigma^\circ(i)$,

– $\Pi(\delta_1)(v_0, \ldots, v_{k-1}) = (v_1, \ldots, v_{k-1}, \Sigma(\delta_k)(v_0))$.

Pour un morphisme u entre deux ω_k–représentations Σ et Σ' de $\mathcal{G}_k$, on note $\iota_k(u)$ le morphisme $u \times \cdots \times u$ entre $\iota_k(\Sigma)$ et $\iota_k(\Sigma')$.

Pour $k = 1$, on a $\mathcal{G}_1 = G^\natural$ et ι_1 est le foncteur identique de $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$. Notons que pour $k > 1$, la ω–représentation $\iota_k(\Sigma)$ dépend du choix de δ_1, mais sa classe d'isomorphisme n'en dépend pas.

Remarque. — Pour des entiers k, $k' \geq 1$ tels que k' divise k, on définit de la même manière un F–morphisme de variétés algébriques

$$\boldsymbol{G}_{k'} \to \boldsymbol{G}_k,\ \delta \mapsto \delta^{k/k'}$$

et — grâce aux points–base $\delta_{k'}$ de $\mathcal{G}_{k'}$ et $\delta_k = (\delta_{k'})^{k/k'}$ de $\mathcal{G}_k$ — un foncteur

$$\iota_k^{k'} : \mathfrak{R}(\mathcal{G}_k, \omega_k) \to \mathfrak{R}(\mathcal{G}_{k'}, \omega_{k'}).$$

Pour k, k', $k'' \geq 1$ tels que k' divise k et k'' divise k', on a

$$\iota_{k'}^{k''} \circ \iota_k^{k'} = \iota_k^{k''}.$$

En particulier pour $k'' = 1$, on a $\iota_{k'} \circ \iota_k^{k'} = \iota_k$. ■

2.6. L'invariant $s(\Pi)$. — Si π est une représentation irréductible de G, on lui associe comme suit un invariant $s(\pi) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$. S'il existe un plus petit entier $k_0 \geq 1$ tel que $\pi(k_0)$ est isomorphe à π, on pose $s(\pi) = k_0$, sinon on pose $s(\pi) = +\infty$. Notons que cet invariant $s(\pi)$ ne dépend que $G^\natural$, de ω, et de la classe d'isomorphisme de π. Si nécessaire, on le notera aussi $s_{G^\natural,\omega}(\pi)$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$s(\pi(k)) = s(\pi).$$

Si Π est une ω–représentation irréductible de $G^\natural$, on lui associe comme dans [**L2**, 8.4] un invariant $s(\Pi) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$. Rappelons la construction. On choisit une sous–représentation irréductible π_0 de Π°, et l'on pose

$$s(\Pi) = s(\pi_0).$$

L'invariant $s(\Pi)$ est bien défini (i.e. il ne dépend pas du choix de π_0), et il dépend seulement de la classe d'isomorphisme de Π. On a

$$\Pi^\circ \simeq \begin{cases} \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\, \pi_0(k) & \text{si } s(\pi_0) = +\infty \\ \oplus_{k=0}^{s(\pi_0)-1} \pi_0(k) & \text{sinon} \end{cases}.$$

En particulier la représentation Π° est semisimple, et elle est de type fini si et seulement si $s(\Pi) < +\infty$, auquel cas elle est de longueur finie. Si $s = s(\Pi) < +\infty$, alors d'après loc. cit., il existe une ω_s–représentation G–irréductible Σ de $\mathcal{G}_s$ telle que $\Sigma^\circ = \pi_0$ et $\iota_s(\Sigma)$ est isomorphe à Π.

Pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, notons $\mathrm{Irr}_{k-1}(G^\natural, \omega)$ le sous–ensemble de $\mathrm{Irr}(G^\natural, \omega)$ formé des Π tels que $s(\Pi) = k$ (pour $k = 1$, les notations sont cohérentes), et $\mathrm{Irr}'_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ le sous–ensemble de $\mathrm{Irr}_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ formé des Σ tels que $s(\Sigma^\circ) = k$. Ici $\mathrm{Irr}_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de ω_k–représentations G–irréductibles de $\mathcal{G}_k$, et $s(\Sigma^\circ) = s_{G^\natural,\omega}(\Sigma^\circ)$. Les ω_k–représentations G–irréductibles de $\mathcal{G}_k$ dont la classe d'isomorphisme appartient à $\mathrm{Irr}'_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ sont dites $(G^\natural, \omega)$*–régulières*.

Remarque. — On peut, pour toute représentation irréductible σ de G, définir l'invariant $s_k(\sigma) = s_{\mathcal{G}_k,\omega_k}(\sigma) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$ en remplaçant dans la définition de $s(\sigma)$ la paire $(G^\natural, \omega)$ par la paire $(\mathcal{G}_k, \omega_k)$. On a $s_k(\sigma) = +\infty$ si $s(\sigma) = +\infty$, et $s_k(\sigma) = \inf\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : \sigma(ki) \simeq \sigma(k)\}$ sinon. En d'autre termes, on a

$$s_k(\sigma) = \frac{1}{k}\mathrm{ppcm}(k, s(\sigma))$$

Pour une ω_k–représentation irréductible Σ de $\mathcal{G}_k$, l'invariant $s(\Sigma)$ associé comme plus haut à Σ est donné par

$$s(\Sigma) = s_k(\sigma_0)$$

pour une (resp. pour toute) sous–représentation irréductible σ_0 de Σ°. Ainsi Σ est G–irréductible si et seulement si $s(\Sigma) = 1$. ■

On définit comme suit une action de $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ sur $\mathrm{Irr}(\mathcal{G}_k, \omega_k)$. Rappelons que l'on a posé $\delta_k = (\delta_1)^k \in \mathcal{G}_k$. Pour une ω_k–représentation Σ de $\mathcal{G}_k$ et un entier $i \geq 1$, on note $\Sigma(i)$ la ω_k–représentation de $\mathcal{G}_k$ donnée par

$$\Sigma(i)(g \cdot \delta_k) = \Sigma^\circ(i)(g) \circ \Sigma(\delta_k), \quad g \in G.$$

La représentation de G sous–jacente est $\Sigma(i)^\circ = \Sigma^\circ(i)$, et à isomorphisme près, $\Sigma(i)$ ne dépend pas du choix de δ_1. Comme $\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}_k}(\delta_k) = \theta^k$, la ω_k–représentation $\Sigma(k)$ de $\mathcal{G}_k$ est isomorphe à Σ. On obtient ainsi une action de $\mathbb{Z}_k$ sur $\mathrm{Irr}(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ qui stabilise $\mathrm{Irr}_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$, et $\mathrm{Irr}'_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ est le sous–ensemble de $\mathrm{Irr}_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ formé des Σ dont le stabilisateur sous $\mathbb{Z}_k$ est trivial. Le lemme suivant est une simple généralisation de [**R**, lemma 2.1].

Lemme. — *Le foncteur ι_k induit une application bijective*

$$\mathrm{Irr}'_0(\mathcal{G}_k,\omega_k)/\mathbb{Z}_k \rightarrow \mathrm{Irr}_{k-1}(G^\natural,\omega).$$

Démonstration. — Soit Π une ω–représentation irréductible de $G^\natural$ d'invariant $s(\Pi)=k$. On a vu que pour toute sous–représentation irréductible π_0 de Π°, il existe une ω_k–représentation G–irréductible Σ de $\mathcal{G}_k$ telle que $\Sigma^\circ=\pi_0$ et $\Pi\simeq\iota_k(\Sigma)$. Par définition de $s(\Pi)$, les représentations $\pi_0(i)$ de G, $i=0,\ldots,k-1$, sont deux–à–deux non équivalentes. Par suite les ω_k–représentations $\Sigma(i)$ de $\mathcal{G}_k$, $i=0,\ldots,k-1$, sont deux–à–deux non équivalentes. Elles définissent donc un élément de $\mathrm{Irr}'_0(\mathcal{G}_k,\omega_k)/\mathbb{Z}_k$. Réciproquement, soit Σ' une ω_k–représentation G–irréductible de $\mathcal{G}_k$ dont le stabilisateur sous $\mathbb{Z}_k$ est trivial, telle que $\iota_k(\Sigma')\simeq\Pi$. Puisque $\iota_k(\Sigma')^\circ\simeq\oplus_{i=0}^{k-1}\Sigma'(i)^\circ$ et $\Pi^\circ\simeq\oplus_{i=0}^{k-1}\Sigma(i)^\circ$, il existe un indice $j\in\{0,\ldots,k-1\}$ tel que $\Sigma'^\circ\simeq\Sigma(j)^\circ$. On en déduit que Σ' est isomorphe à $\lambda\cdot\Sigma(j)$ pour un nombre complexe non nul λ, mais comme $\iota_k(\lambda\cdot\Sigma(j))=\lambda\cdot\iota_k(\Sigma(j))\simeq\lambda\cdot\iota_k(\Sigma)$, ce λ vaut 1. D'où le lemme. □

2.7. L'espace $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural,\omega)$.— L'action de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathrm{Irr}(G^\natural,\omega)$ provient d'une action fonctorielle sur $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$, triviale sur les flèches, encore notée $(\lambda,\Pi)\mapsto\lambda\cdot\Pi$. Soit $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural,\omega)$ le $\mathbb{C}$–espace vectoriel engendré (sur $\mathbb{C}$) par les ω–représentations Π de $G^\natural$ telles que Π° est de longueur finie, modulo les relations :
- pour toute suite exacte $0\rightarrow\Pi_1\rightarrow\Pi_2\rightarrow\Pi_3\rightarrow 0$ de ω–représentations de $G^\natural$ (telles que les Π_i° sont de longueur finie), on a $\Pi_3=\Pi_2-\Pi_1$;
- pour tout $\lambda\in\mathbb{C}^\times$, on a $\lambda\cdot\Pi=\lambda\Pi$;
- pour tout entier $k>1$, on a $\iota_k(\mathcal{G}_k,\omega_k)=0$.

Pour une ω–représentation Π de $G^\natural$ et un nombre complexe non nul λ, on a $(\lambda\cdot\Pi)^\circ=\Pi^\circ$ mais $\lambda\cdot\Pi\not\simeq\Pi$ si $\lambda\neq 1$. La deuxième relation signifie que si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des nombres complexes non nuls tels que $\sum_{i=1}^n\lambda_i=0$, alors pour toute ω–représentation Π de $G^\natural$ telle que Π° est de longueur finie, on a $\sum_{i=1}^n\lambda_i\Pi=0$ dans $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural,\omega)$.

Notons $\mathrm{Irr}_{<+\infty}(G^\natural,\omega)$ le sous–ensemble des $\mathrm{Irr}(G^\natural,\omega)$ formé des Π tels que $s(\Pi)<+\infty$. On a donc

$$\mathrm{Irr}_{<+\infty}(G^\natural,\omega)=\coprod_{k\geq 0}\mathrm{Irr}_k(G^\natural,\omega),$$

et l'action de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathrm{Irr}(G^\natural,\omega)$ stabilise chacun des espaces $\mathrm{Irr}_k(G^\natural,\omega)$. D'autre part on a une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathrm{Irr}(G)$, donnée par $(k,\pi)\mapsto\pi(k)$. D'après 2.6, l'application $\Pi\mapsto\pi_0$, où π_0 est sous–représentation irréductible de Π°, induit une application injective

$$\mathrm{Irr}_{<+\infty}(G^\natural,\omega)/\mathbb{C}^\times\rightarrow\mathrm{Irr}(G)/\mathbb{Z}$$

d'image l'ensemble des $\mathbb{Z}$–orbites des π dans $\mathrm{Irr}(G)$ tels que $s_{G^\natural,\omega}(\pi)<+\infty$.

On note :
- $\mathcal{G}(G^\natural,\omega)$ le $\mathbb{Z}$–module libre de base $\mathrm{Irr}^\omega_{<+\infty}(G^\natural)$,
- $\mathcal{G}_0(G^\natural,\omega)$ le sous–groupe de $\mathcal{G}(G^\natural,\omega)$ engendré par $\mathrm{Irr}_0(G^\natural,\omega)$,
- $\mathcal{G}_{>0}(G^\natural,\omega)$ le sous–groupe de $\mathcal{G}(G^\natural,\omega)$ engendré par $\coprod_{k\geq 1}\mathrm{Irr}_k(G^\natural,\omega)$.

On a donc la décomposition

$$\mathcal{G}(G^\natural,\omega)=\mathcal{G}_0(G^\natural,\omega)\oplus\mathcal{G}_{>0}(G^\natural,\omega)$$

Soit aussi $\mathcal{G}(G)$ le $\mathbb{Z}$–module libre de base $\mathrm{Irr}(G)$. Le foncteur d'oubli $\Pi\mapsto\Pi^\circ$ induit un morphisme de groupes

$$\mathcal{G}(G^\natural,\omega)\rightarrow\mathcal{G}(G),$$

encore noté $\Pi\mapsto\Pi^\circ$.

On peut aussi, pour chaque entier $k \geq 1$, remplacer la paire $(G^\natural, \omega)$ par la paire $(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ dans les définitions ci–dessus (cf. 2.6, remarque). Le foncteur $\iota_k^\circ : \mathfrak{R}(G) \to \mathfrak{R}(G)$ sous–jacent à ι_k envoie représentation de longueur finie sur représentation de longueur finie, par conséquent ι_k induit un morphisme de groupes

$$\mathcal{G}(\mathcal{G}_k, \omega_k) \to \mathcal{G}(G^\natural, \omega),$$

encore noté ι_k.

Le quotient $\mathcal{G}_0(G^\natural, \omega) = \mathcal{G}(G^\natural, \omega)/\mathcal{G}_{>0}(G^\natural, \omega)$ est encore trop gros : il contient des éléments qui ne contribuent en rien à l'affaire qui nous intéresse (cf. 2.9). Soit donc $\mathcal{G}_{0+}(G^\natural, \omega)$ le sous–groupe de $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$ engendré par $\mathcal{G}_{>0}(G^\natural, \omega)$ et par les éléments de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \Pi$ pour un élément Π de $\mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$, un entier $n > 1$, et des nombres complexes non nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

Lemme. — *Pour tout entier $k > 1$, on a l'inclusion*

$$\iota_k(\mathcal{G}(\mathcal{G}_k, \omega_k)) \subset \mathcal{G}_{0+}(G^\natural, \omega).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour toute ω_k–représentation irréductible Σ de $\mathcal{G}_k$, la classe d'isomorphisme de $\iota_k(\Sigma)$ appartient à $\mathcal{G}_{0+}(G^\natural, \omega)$. D'après la remarque de 2.5 et le lemme de 2.6, il existe un entier $a \geq 1$ et une ω_{ka}–représentation G–irréductible Σ' de $\mathcal{G}_{ka}$ tels que Σ est isomorphe à $\iota_{ka}^k(\Sigma')$. Par suite $\iota_k(\Sigma)$ est isomorphe à $\iota_k(\iota_{ka}^k(\Sigma')) = \iota_{ka}(\Sigma')$, et quitte à remplacer k par ka et Σ par Σ', on peut supposer que Σ est G–irréductible. Soit alors $\sigma = \Sigma^\circ$ et $s = s(\sigma)$. Puisque $\sigma(k) \simeq \sigma$, s divise k. Si $s = 1$, alors d'après le lemme de 2.6, $\iota_k(\Sigma)$ est une ω–représentation irréductible de G d'invariant $s(\iota_k(\Sigma)) = k$, et son image dans $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$ appartient à $\mathcal{G}_{>0}(G^\natural, \omega)$. On peut donc supposer $s > 1$. Posons $\Delta = \iota_k^s(\Sigma)$. C'est une ω_s–représentation de $\mathcal{G}_s$, telle que

$$\Delta^\circ = \sigma \oplus \sigma(s) \oplus \cdots \oplus \sigma((k'-1)s),\ k' = k/s.$$

Choisissons un isomorphisme $\widetilde{B}$ de σ sur $\sigma(s)$. Alors $\widetilde{B}^{k'}$ est un isomorphisme de σ sur $\sigma(k)$, et l'on peut choisir $\widetilde{B}$ de telle manière que $\widetilde{B}^{k'} = \Sigma(\delta_k)$. Notons $\widetilde{\Sigma}$ la ω_s–représentation (G–irréductible) de $\mathcal{G}_s$ définie par $\widetilde{\Sigma}^\circ = \sigma$ et $\widetilde{\Sigma}(\delta_s) = \widetilde{B}$. Soit μ une racine primitive k'–ième de l'unité (dans $\mathbb{C}^\times$). Posons $\Delta' = \oplus_{i=0}^{k'-1} \mu^i \cdot \widetilde{\Sigma}$. C'est une ω_s–représentation de $\mathcal{G}_s$, telle que $\Delta'^\circ = \oplus_{i=0}^{k'-1}\sigma$. Pour $j = 0, \dots, k'-1$, notons $V_{\Delta,j}$ le sous–espace vectoriel de $V_\Delta = \oplus_{i=0}^{k'-1} V_\sigma$ formé des vecteurs de la forme

$$(v, \mu^j \widetilde{B}(v), \mu^{2j}\widetilde{B}^2(v), \dots, \mu^{(k'-1)j}\widetilde{B}^{k'-1}(v)), \quad v \in V_\sigma.$$

Il est stable sous l'action de G (via Δ°) et sous celle de $\Delta(\delta_s)$, donc définit une sous–ω_s–représentation de Δ, que l'on note Δ_j. L'application

$$V_\sigma \to V_{\Delta,j},\ v \mapsto (v, \mu^j \widetilde{B}(v), \mu^{2j}\widetilde{B}^2(v), \dots, \mu^{(k'-1)j}\widetilde{B}^{k'-1}(v))$$

est un isomorphisme de $\mu^j \cdot \widetilde{\Sigma}$ sur Δ_j. On en déduit que $\Delta = \oplus_{j=0}^{k'-1}\Delta_j$ est isomorphe à Δ'. Par conséquent $\iota_k(\Sigma) = \iota_s(\Delta)$ est isomorphe à $\oplus_{i=0}^{k'-1}\mu^i \cdot \iota_s(\widetilde{\Sigma})$, dont la classe d'isomorphisme appartient à $\mathcal{G}_{0+}(G^\natural, \omega)$. □

D'après le lemme, l'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ introduit au début de ce n° s'identifie canoniquement au quotient $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)/\mathcal{G}_{0+}(G^\natural, \omega)$. De plus le dual algébrique

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega), \mathbb{C})$$

coïncide avec l'espace des formes $\mathbb{Z}$–linéaires Φ sur $\mathcal{G}_0(G^\natural, \omega)$ vérifiant

$$\Phi(\lambda \cdot \Pi) = \lambda\Phi(\Pi)$$

pour tout $\Pi \in \mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Notations. — La projection canonique $\mathcal{G}(G^\natural, \omega) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ identifie $\mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ à un sous–ensemble de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$, que l'on note aussi $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ — il engendre $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ mais n'est pas une base sur $\mathbb{C}$. D'autre part, l'action de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$ est notée avec un « $\cdot$ », que l'on aura tendance à supprimer après projection sur $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$.

2.8. $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$**–modules et** $(\mathcal{H}^\natural_K, \omega)$**–modules.** — Pour un espace topologique totalement discontinu X, on note $\mathcal{H}(X)$ l'espace des fonctions complexes sur X qui sont localement constantes et à support compact. On pose $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G)$ et $\mathcal{H}^\natural = \mathcal{H}(G^\natural)$.

Fixons une mesure de Haar dg sur G, et notons $d\delta$ la mesure de Haar sur $G^\natural$ au sens de [**L2**, 2.5] image de dg par l'isomorphisme $G \to G^\natural$, $g \mapsto g \cdot \delta$ pour un (resp. pour tout) $\delta \in G^\natural$. La mesure dg munit l'espace $\mathcal{H}$ d'un produit de convolution, et l'espace $\mathcal{H}^\natural$ d'une structure de $\mathcal{H}$–bimodule [**L2**, 8.2] : pour f, $f' \in \mathcal{H}$, $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ et $\delta \in G^\natural$, on pose

$$(f * \phi)(\delta) = \int_G f(g)\phi(g^{-1} \cdot \delta)dg, \quad (\phi * f)(\delta) = \int_G \phi(\delta \cdot g)f(g^{-1})dg.$$

Comme dans loc. cit. on appelle $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$–module un $\mathcal{H}$–module V muni d'une application $\mathcal{H}^\natural \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $\phi \mapsto (v \mapsto \phi \cdot v)$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{H}^\natural$, tous f, $f' \in \mathcal{H}$ et tout $v \in V$, on a

$$(f * \phi * f') \cdot v = f \cdot (\phi \cdot (\omega f' \cdot v)).$$

Les $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$–modules forment une sous–catégorie (non pleine) de la catégorie des $\mathcal{H}$–modules à gauche : un morphisme entre deux $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$–modules V_1 et V_2 est une application $\mathbb{C}$–linéaire $u : V_1 \to V_2$ telle que $u(\phi \cdot v) = \phi \cdot u(v)$ pour tout $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ et tout $v \in V_1$ (une telle application est automatiquement $\mathcal{H}$–linéaire).

Variante. — Soit $\mathcal{H}^\natural_\omega = \mathcal{H}(G^\natural, \omega)$ l'espace vectoriel $\mathcal{H}^\natural$ muni de la structure de $\mathcal{H}$–bimodule donnée par (pour $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ et $f \in \mathcal{H}$) :

$$f \cdot \phi = f * \phi, \quad \phi \cdot f = \phi * \omega^{-1} f.$$

Par définition, la notion de $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$–module équivaut à celle de $\mathcal{H}^\natural_\omega$–module (c'est–à–dire de $(\mathcal{H}^\natural_\omega, \xi = 1)$–module). ■

Exemple. — L'application $\mathcal{H} \to \mathcal{H}^\natural_\omega$, $f \mapsto u(f) = u_{\delta_1}(f)$ définie par $u(f)(g \cdot \delta_1) = f(g)$ $(g \in G)$ est un isomorphisme $\mathbb{C}$–linéaire vérifiant $u(f * h * f') = f \cdot u(h) \cdot \omega f'^{\theta}$. Pour $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ et $f \in \mathcal{H}$, posons

$$\phi \bullet f = u^{-1}(\phi \cdot f) \in \mathcal{H}.$$

Pour f, f', $h \in \mathcal{H}$ et $\phi \in \mathcal{H}^\natural$, on a

$$(f * \phi * f') \bullet h = f * (\phi \bullet (\omega f' * h)).$$

En d'autres termes, $\mathcal{H}$ est muni d'une structure de $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$–module. À isomorphisme près, cette structure ne dépend pas du choix de $\delta_1 \in G^\natural$: remplacer δ_1 par $\delta'_1 = x \cdot \delta$ revient à remplacer u par $u' = \delta_x \circ u$, où l'on a posé $\delta_x(f)(g) = f(gx)$, $f \in \mathcal{H}$, $g \in G$. ■

Pour une ω–représentation Π de $G^\natural$ et une fonction $\phi \in \mathcal{H}^\natural$, on note $\Pi(\phi)$ le $\mathbb{C}$-endomorphisme de l'espace V de Π donné par

$$\Pi(\phi)(v) = \int_{G^\natural} \phi(\delta)\Pi(\delta)(v)d\delta, \quad v \in V.$$

Puisque ϕ est localement constante et à support compact, et que Π° est lisse, l'intégrale est absolument convergente (c'est même une somme finie). Cela munit V d'une structure de

$(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–module *non dégénéré*, c'est–à–dire tel que $\mathcal{H}^\natural\cdot V=V$, et l'application $(\Pi,V)\mapsto V$ est un isomorphisme entre $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$ et la catégorie des $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–modules non dégénérés — une sous–catégorie pleine de celle des $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–modules.

Pour un sous-groupe ouvert compact K de G, on note $\mathcal{H}_K=\mathcal{H}_K(G)$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}$ formée des fonctions qui sont bi–invariantes par K. On note e_K l'élément unité de $\mathcal{H}_K$, c'est–à–dire la fonction caractéristique de K divisée par $\mathrm{vol}(K,dg)$, et l'on pose

$$\mathcal{H}_K^\natural=\mathcal{H}_K(G^\natural)=e_K*\mathcal{H}^\natural*e_K.$$

C'est le sous–$\mathcal{H}_K$–bimodule de $\mathcal{H}^\natural$ formé des fonctions qui sont bi–invariantes par K. Si de plus ω est trivial sur K, on définit comme ci–dessus les notions de $(\mathcal{H}_K^\natural,\omega)$–module et de $(\mathcal{H}_K^\natural,\omega)$-module non dégénéré, ainsi que les catégories correspondantes. Alors pour toute ω–représentation (Π,V) de $G^\natural$, le sous–espace $V^K=e_K\cdot V$ de V (formé des vecteurs qui sont fixés par K) est naturellement muni d'une structure de $(\mathcal{H}_K^\natural,\omega)$–module.

Soit $K^\natural$ un sous–espace tordu ouvert compact de $G^\natural$, c'est–à–dire un sous–ensemble de la forme $K^\natural=K\cdot\delta$ pour un sous–groupe ouvert compact K de G et un élément δ de $G^\natural$ tel que $\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta)(K)=K$. Le $\mathcal{H}_K$–bimodule $\mathcal{H}_K^\natural$ est un $\mathcal{H}_K$–module à gauche (resp. à droite) libre de rang 1 : notant $e_{K^\natural}$ la fonction caractéristique de $K^\natural$ divisée par $\mathrm{vol}(K^\natural,d\delta)=\mathrm{vol}(K,dg)$, on a

$$\mathcal{H}_K^\natural=\mathcal{H}_K*e_{K^\natural}=e_{K^\natural}*\mathcal{H}_K.$$

Si de plus ω est trivial sur K, alors pour toute ω–représentation (Π,V) de $G^\natural$, le $(\mathcal{H}_K^\natural,\omega)$–module V^K est automatiquement non dégénéré : on a

$$V^K=\mathcal{H}_K^\natural\cdot V^K\ (=\mathcal{H}_K^\natural\cdot V).$$

En particulier il coïncide avec le sous–espace $V^{K^\natural}=e_{K^\natural}\cdot V$ de V.

Un $(\mathcal{H}^\natural,\omega)$–module non dégénéré V est dit *simple* s'il est non nul et si le seul sous–espace non nul $\mathcal{H}^\natural$-stable de V est V lui–même, et il est dit $\mathcal{H}$*–simple* s'il est simple comme $\mathcal{H}$–module. On définit de la même manière les notions de $(\mathcal{H}_K^\natural,\omega)$–module (non dégénéré) simple et $\mathcal{H}_K$–simple.

D'après [**L2**, 8.3, 8.6], une ω–représentation non nulle (Π,V) de $G^\natural$ est irréductible (resp. G–irréductible) si et seulement si pour tout sous–espace tordu ouvert compact $K^\natural$ de $G^\natural$ tel que ω est trivial sur K, le $(\mathcal{H}_K^\natural,\omega)$–module (resp. le $\mathcal{H}_K$–module) V^K est nul ou simple ; où K est le sous–groupe de G sous–jacent à $K^\natural$. De plus pour un tel $K^\natural$, l'application $(\Pi,V)\mapsto V^{K^\natural}=V^K$ induit (d'après loc. cit.) une bijection entre :

– l'ensemble des classes d'isomorphisme de ω–représentations irréductibles (Π,V) de $G^\natural$ telles que $V^K\neq 0$,
– et l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(\mathcal{H}_K^\natural,\omega)$–modules simples ;

elle induit aussi une bijection entre :

– l'ensemble des classes d'isomorphisme de ω–représentations G–irréductibles (Π,V) de $G^\natural$ telles que $V^K\neq 0$,
– et l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(\mathcal{H}_K^\natural,\omega)$–modules $\mathcal{H}_K$–simples.

Remarque 1. — Les résultats ci–dessus sont vrais pour tout espace topologique tordu localement profini $(G,G^\natural)$ vérifiant la propriété (P_2) de [**L2**, 8.3], c'est–à–dire tel qu'il existe une base de voisinages de 1 dans G formée de sous–groupes ouverts compacts et un élément $\delta\in G^\natural$ normalisant chacun des éléments de la base. Dans le cas qui nous intéresse ici, on a vérifié [**L2**, 8.6] que si $I^\natural$ est un sous–espace d'Iwahori de $G^\natural$, c'est–à–dire un sous–espace tordu de la forme $I^\natural=I\cdot\delta$ pour un sous–groupe d'Iwahori I de G, alors tous les sous-groupes de congruence de I sont normalisés par δ (voir 2.19). Notons que puisque les sous–groupes d'Iwahori de G sont tous conjugués dans G, il existe un sous–espace d'Iwahori de $G^\natural$. ■

Remarque 2. — Soit $K^\natural$ un sous–espace tordu ouvert compact de $G^\natural$ tel que ω est trivial sur le groupe K sous–jacent à $K^\natural$. À tout $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$–module simple W est associé comme en 2.6 un invariant $s(W) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$. Puisque $\mathcal{H}_K^\natural = \mathcal{H}_K * e_{K^\natural} = e_{K^\natural} * \mathcal{H}_K$, l'application $x \mapsto e_{K^\natural} \cdot x$ est un $\mathbb{C}$–automorphisme de W. Choisissons un sous–$\mathcal{H}_K$–module simple W_0 de W, et pour chaque entier $k \geq 1$, notons W_k et W_{-k} les sous–$\mathcal{H}_K$–modules de W définis par $W_k = e_{K^\natural} \cdot W_{k-1}$ et $e_{K^\natural} \cdot W_{-k} = W_{-k+1}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, le $\mathcal{H}_K$–module W_k est simple. On distingue deux cas : ou bien $\dim_{\mathbb{C}}(W) = +\infty$, auquel cas on pose $s(W) = +\infty$, et l'on a $W = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} W_k$; ou bien $\dim_{\mathbb{C}}(W) < +\infty$, auquel cas il existe un plus petit entier $s = s(W) \geq 1$ tel que $W_s = W_0$, et l'on a $W = \oplus_{k=0}^{s-1} W_k$. Bien sûr si (Π, V) est une ω–représentation irréductible de $G^\natural$ telle que le $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$–module V^K est isomorphe à W, on a $s(\Pi) = s(V^K)$. ■

Remarque 3. — Puisque G est dénombrable à l'infini, la démonstration du lemme de Schur donnée dans [**BZ**, 2.11] est valable ici : pour toute ω–représentation irréductible Π de $G^\natural$, l'espace des endomorphismes de Π est de dimension 1. En particulier, Π possède un caractère central $\omega_\Pi : Z(G^\natural) \to \mathbb{C}^\times$. Pour toute sous–représentation irréductible π_0 de Π°, la restriction à $Z(G^\natural)$ du caractère central $\omega_{\pi_0} : Z(G) \to \mathbb{C}^\times$ de π_0 coïncide avec ω_Π. Si de plus Π est G–irréductible, on a $\omega^{-1}(\omega_{\Pi^\circ})^\theta = \omega_{\Pi^\circ}$. ■

2.9. Les caractères Θ_Π. — Pour toute ω–représentation Π de $G^\natural$ telle que Π° est admissible, on définit comme suit une distribution Θ_Π sur $G^\natural$, appelée *caractère–distribution* ou simplement *caractère*, de Π : pour $\phi \in \mathcal{H}^\natural$, l'opérateur $\Pi(\phi)$ sur l'espace de Π est de rang fini, et l'on pose

$$\Theta_\Pi(\phi) = \mathrm{trace}(\Pi(\phi)).$$

La distribution Θ_Π ne dépend que de la classe d'isomorphisme de Π (et bien sûr du choix de $d\delta$), et vérifie

$$\Theta_{\lambda\cdot\Pi} = \lambda\Theta_\Pi, \quad \lambda \in \mathbb{C}^\times.$$

Pour tout élément Π de $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$, on définit par linéarité une distribution Θ_Π sur $\mathcal{H}^\natural$, qui vérifie

– $\Theta_{\lambda\cdot\Pi} = \lambda\Theta_\Pi$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$,
– $\Theta_\Pi = 0$ si $\Pi \in \iota_k(\mathcal{G}(\mathcal{G}_k, \omega_k))$ pour un entier $k > 1$.

On en déduit que pour $\phi \in \mathcal{H}^\natural$, l'application

$$\mathcal{G}(G^\natural, \omega) \to \mathbb{C},\ \Pi \mapsto \Theta_\Pi(\phi)$$

se factorise à travers $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$. C'est donc un élément du dual algébrique $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)^*$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$, que l'on note Φ_ϕ. Notre théorème principal — cf. 3.1 pour un énoncé précis — est une description de ce morphisme $\mathbb{C}$–linéaire

$$\mathcal{H}^\natural \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)^*,\ \phi \mapsto \Phi_\phi.$$

Le théorème de Paley–Wiener décrit son image, et le théorème de densité spectrale son noyau.

2.10. Induction parabolique et restriction de Jacquet. — Soit $P^\natural$ un sous–espace parabolique de $G^\natural$, muni d'une décomposition de Levi

$$P^\natural = M^\natural \cdot U.$$

On note avec les mêmes lettres sans l'exposant « $\natural$ » les groupes topologiques sous–jacents à $P^\natural$ et $M^\natural$: P est un sous–groupe parabolique de G de radical unipotent U, et M est une composante de Levi de P. Soit

$$i_P^G : \mathfrak{R}(M) \to \mathfrak{R}(G)$$

et

$$r_G^P : \mathfrak{R}(G) \to \mathfrak{R}(M)$$

les foncteurs induction parabolique et restriction de Jacquet normalisés. On considère ω comme un caractère de M par restriction. Dans [**L2**, 5.9 et 5.10] sont définis les foncteurs induction parabolique normalisée

$${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural} : \mathfrak{R}(M^\natural, \omega) \to \mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$$

et restriction de Jacquet normalisée

$${}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathfrak{R}(G^\natural, \omega) \to \mathfrak{R}(M^\natural, \omega).$$

Ils vérifient $({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^\circ = \iota_P^G$ et $({}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural})^\circ = r_G^P$, et commutent aux foncteurs ι_k. Comme i_P^G et r_G^P préservent la propriété d'être de longueur finie, on obtient des morphismes de groupes

$${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural} : \mathcal{G}(M^\natural, \omega) \to \mathcal{G}(G^\natural, \omega)$$

et

$${}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{G}(G^\natural, \omega) \to \mathcal{G}(M^\natural, \omega).$$

Par passage aux quotients, ces derniers induisent des morphismes $\mathbb{C}$–linéaires

$${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^\natural, \omega) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$$

et

$${}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^\natural, \omega).$$

Remarque. — L'espace tordu $M^\natural$ et le groupe M ne sont pas spécifiés dans les notations, mais cette ambiguïté disparaîtra plus loin puisque nous n'aurons à considérer que des sous–groupes paraboliques « standard », c'est–à–dire contenant un sous–groupe parabolique minimal de G fixé une fois pour toutes. Notons aussi que pour que l'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^\natural, \omega)$ soit non nul, il faut que ω soit trivial sur le centre $Z(M^\natural)$ de $M^\natural$ ■

Fixons un sous–espace parabolique minimal $P_\circ^\natural$ de $G^\natural$, et une décomposition de Levi

$$P_\circ^\natural = M_\circ^\natural \cdot U_\circ.$$

Notons $\mathcal{P}(G^\natural)$ l'ensemble des sous–espaces paraboliques de $G^\natural$ contenant $P_\circ^\natural$ — on les qualifie de « standard »—, et $\mathcal{P}(G^\natural, \omega)$ le sous–ensemble de $\mathcal{P}(G^\natural)$ formé des $P^\natural$ tels que ω est trivial sur $M_P^\natural$. Pour $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, on note $M_P^\natural$ l'unique composante de Levi de $P^\natural$ contenant $M_\circ^\natural$, P et M_P les groupes topologiques sous–jacents à $P^\natural$ et $M_P^\natural$, et U_P le radical unipotent de P. On a la décomposition de Levi

$$P^\natural = M_P^\natural \cdot U_P.$$

Pour $P^\natural$, $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ tels que $Q^\natural \subset P^\natural$, on note ${}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural}$ le foncteur

$${}^\omega i_{Q^\natural \cap M_P^\natural}^{M_P^\natural} : \mathfrak{R}(M_Q^\natural, \omega) \to \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega)$$

et ${}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural}$ le foncteur

$${}^\omega r_{M_P^\natural}^{Q^\natural\cap M_P^\natural} : \mathfrak{R}(M_P^\natural,\omega)\rightarrow \mathfrak{R}(M_Q^\natural,\omega).$$

On obtient comme plus haut des morphismes de groupes

$${}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{G}(M_Q^\natural,\omega)\rightarrow \mathcal{G}(M_P^\natural,\omega),\quad {}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural} : \mathcal{G}(M_P^\natural,\omega)\rightarrow \mathcal{G}(M_Q^\natural,\omega),$$

et des morphismes $\mathbb{C}$–linéaires

$${}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural,\omega)\rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega),\quad {}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega)\rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural,\omega),$$

que l'on notera parfois aussi ${}^\omega i_{Q^\natural,\mathbb{C}}^{P^\natural}$ et ${}^\omega r_{P^\natural,\mathbb{C}}^{Q^\natural}$ pour éviter toute ambiguïté.

Lemme. — *Soit $P^\natural$, $Q^\natural$, $R^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ tels que $R^\natural\subset Q^\natural\subset P^\natural$. Soit Σ une ω–représentation de $M_R^\natural$, et soit Π une ω–représentation de $M_P^\natural$.*

(1) *On a un isomorphisme naturel, fonctoriel en Σ,*

$${}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural}\circ {}^\omega i_{R^\natural}^{Q^\natural}(\Sigma)\simeq {}^\omega i_{R^\natural}^{P^\natural}(\Sigma).$$

(2) *On a un isomorphisme naturel, fonctoriel en Π,*

$${}^\omega r_{Q^\natural}^{R^\natural}\circ {}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural}(\Pi)\simeq {}^\omega r_{P^\natural}^{R^\natural}(\Pi).$$

(3) *On a un isomorphisme naturel, fonctoriel en Σ et Π,*

$$\mathrm{Hom}_{M_R^\natural}({}^\omega r_{P^\natural}^{R^\natural}(\Pi),\Sigma)\simeq \mathrm{Hom}_{M_P^\natural}(\Pi,{}^\omega i_{R^\natural}^{P^\natural}(\Sigma)).$$

Démonstration. — Les propriétés de transitivité des foncteurs induction parabolique et restriction de Jacquet normalisés sont conséquences directes des définitions. On épargne au lecteur leurs vérifications. Quant au point (3), on sait que le foncteur $r_P^R=({}^\omega r_{P^\natural}^{R^\natural})^\circ$ est un adjoint à gauche du foncteur $i_R^P=({}^\omega i_{R^\natural}^{P^\natural})^\circ$: on a un isomorphisme naturel, fonctoriel en Σ° et Π°,

$$\mathrm{Hom}_{M_R}(r_P^R(\Pi^\circ),\Sigma^\circ)\simeq \mathrm{Hom}_{M_P}(\Pi^\circ,i_R^P(\Sigma^\circ)).$$

Il induit par restriction un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{M_R^\natural}({}^\omega r_{P^\natural}^{R^\natural}(\Pi),\Sigma)$ sur $\mathrm{Hom}_{M_P^\natural}(\Pi,{}^\omega i_{R^\natural}^{P^\natural}(\Sigma))$, fonctoriel en Σ et Π. □

On note $\mathcal{L}(G^\natural)$ l'ensemble $\{M_P^\natural : P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)\}$, et $\mathcal{L}(G^\natural,\omega)$ le sous–ensemble de $\mathcal{L}(G^\natural)$ formé des $M_P^\natural$ tels que ω est trivial sur le centre $Z(M_P^\natural)=Z(M_P)^\theta$ de $M_P^\natural$. Pour $P\in\mathcal{P}(G^\natural)$, on a $P^\natural=M_P^\natural\cdot U_\circ$, par conséquent l'application $\mathcal{P}(G^\natural)\rightarrow\mathcal{L}(G^\natural)$, $P^\natural\mapsto M_P^\natural$ est bijective, et elle induit une bijection $\mathcal{P}(G^\natural,\omega)\rightarrow\mathcal{L}(G^\natural,\omega)$.

Le groupe $P_\circ$ est un sous–groupe parabolique minimal de G, et l'on définit de la même manière $\mathcal{P}(G)$, M_P pour $P\in\mathcal{P}(G)$, i_Q^P et r_P^Q pour P, $Q\in\mathcal{P}(G)$ tels que $Q\subset P$, et $\mathcal{L}(G)$. L'application $\mathcal{P}(G)\rightarrow\mathcal{L}(G)$, $P\mapsto M_P$ est bijective.

Hypothèse. — *On suppose désormais que le point–base δ_1 est choisi dans $M_\circ^\natural$.*

Puisque $\theta=\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta_1)$ stabilise $P_\circ$, il opère sur $\mathcal{P}(G)$ et l'application $P^\natural\mapsto P$ est une bijection de $\mathcal{P}(G^\natural)$ sur le sous–ensemble $\mathcal{P}(G)^\theta$ de $\mathcal{P}(G)$ formé des P qui sont θ–stables. Pour $P\in\mathcal{P}(G)$, on a $\theta(M_P)=M_{\theta(P)}$ et $\theta(U_P)=U_{\theta(P)}$. En particulier θ opère aussi sur $\mathcal{L}(G)$. On note $\mathcal{L}(G)^\theta$ le sous–ensemble de $\mathcal{L}(G)$ formé des M qui sont θ-stables. Pour $P\in\mathcal{P}(G)$, puisque $P=M_PP_\circ$, on a

$$\theta(P)=\theta(M_P)P_\circ.$$

On en déduit que l'application $\mathcal{P}(G)^\theta\rightarrow\mathcal{L}(G)^\theta$, $P\mapsto M_P$ est elle aussi bijective.

Notons que les opérations de θ sur $\mathcal{P}(G)$ et sur $\mathcal{L}(G)$ dépendent du choix de la composante de Levi $M_\circ^\natural$ de $P_\circ^\natural$, mais elles ne dépendent pas du choix de δ_1 dans $M_\circ^\natural$.

2.11. Caractères non ramifiés. — Soit M un groupe topologique localement profini, et soit $M^\natural$ un M–espace topologique tordu. On note M^1 le sous-groupe de M engendré par ses sous–groupes ouverts compacts, et l'on pose

$$\mathfrak{P}(M) = \mathrm{Hom}(M/M^1, \mathbb{C}^\times).$$

Les éléments de $\mathfrak{P}(M)$ sont appelés *caractères non ramifiés de M*.

Exemple. — Soit A le groupe des points F–rationnels d'un tore déployé et défini sur F, et soit $X = \mathrm{X}^*(A)$ le groupe des caractères algébriques de A. On a $A = \mathrm{Hom}(X, F^\times)$ et A^1 est le sous–groupe compact maximal $\mathrm{Hom}(X, \mathfrak{o}^\times)$ de A. Le choix d'une uniformisante ϖ de $F^\times$ définit un sous–groupe fermé (discret) $A^\varpi = \mathrm{Hom}(X, \langle\varpi\rangle)$ de A. L'application produit $A^\varpi \times A^1 \to A$ est un isomorphisme de groupes topologiques ; d'où un isomorphisme $A^\varpi \simeq A/A^1$, qui identifie $\mathrm{Hom}(A^\varpi, \mathbb{C}^\times)$ au groupe $\mathfrak{P}(A)$.

Pour tout caractère χ de M, le caractère $\chi^\tau = \chi \circ \tau$ de M, où $\tau = \mathrm{Int}_{M^\natural}(\delta)$ pour un $\delta \in M^\natural$, ne dépend pas du choix de $\delta \in M^\natural$. On note $\mathfrak{P}(M^\natural)$ le sous–groupe de $\mathfrak{P}(M)$ formé des ψ tels que $\psi \circ \mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta) = \psi$ pour un (i.e. pour tout) $\delta \in M^\natural$. Les éléments de $\mathfrak{P}(M^\natural)$ sont appelés *caractères non ramifiés de $M^\natural$*. Pour $\delta \in M^\natural$, on pose aussi $\mathfrak{P}(M)^\tau = \mathfrak{P}(M^\natural)$, $\tau = \mathrm{Int}_{M^\natural}(\delta)$.

Remarque 1. — Supposons de plus que $M^\natural$ est un sous–espace tordu de $G^\natural$, par exemple une composante de Levi d'un sous–espace parabolique de $G^\natural$. On peut alors définir un autre sous–groupe de $\mathfrak{P}(M)$, qui contient $\mathfrak{P}(M^\natural)$. Soit $\mathfrak{P}(M, G^\natural)$ le sous–groupe de $\mathfrak{P}(M)$ formé des ψ vérifiant la propriété suivante : il existe un élément w de $N_G(M)/M$ tel que pour un (i.e. pour tout) $\delta \in M^\natural$, posant $\tau = \mathrm{Int}_{M^\natural}(\delta)$, on a

$$\psi^\tau = {}^w\psi, \quad {}^w\psi = \psi \circ \mathrm{Int}\, w^{-1};$$

où $N_G(M)$ désigne le normalisateur de M dans G. En d'autres termes, $\mathfrak{P}(M, G^\natural)$ est le sous–groupe de $\mathfrak{P}(M)$ formé des ψ tels que $\psi \circ \mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta)|_M = \psi$ pour un $\delta \in G^\natural$ normalisant M. Ce groupe $\mathfrak{P}(M, G^\natural)$ dépend bien sûr de M et de $G^\natural$, mais il ne dépend pas de $M^\natural$. On a $\mathfrak{P}(M^\natural) = \mathfrak{P}(M, M^\natural)$. ■

Soit $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$ le sous–ensemble de $\mathrm{Irr}_\mathbb{C}(M^\natural) = \mathrm{Irr}_\mathbb{C}(M^\natural, \omega = 1)$ formé des Π tels que Π° est un caractère non ramifié de M. Ce caractère est alors un élément de $\mathfrak{P}(M^\natural)$. D'ailleurs le foncteur d'oubli $\Pi \mapsto \Pi^\circ$ induit une application bijective

$$\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)/\mathbb{C}^\times \to \mathfrak{P}(M^\natural).$$

Pour $\Psi \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$ et $\delta \in M^\natural$, $\Psi(\delta)$ est un $\mathbb{C}$-automorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension 1, c'est–à–dire la multiplication par un nombre complexe non nul, et l'on identifie $\Psi(\delta)$ à ce nombre. Cela munit l'ensemble $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$ d'une structure de groupe : pour Ψ, $\Psi' \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$ et $\delta \in M^\natural$, on pose

$$(\Psi\Psi')(\delta) = \Psi(\delta)\Psi'(\delta).$$

Tout élément δ de $M^\natural$ définit un scindage du morphisme $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural) \to \mathfrak{P}(M^\natural)$, $\Psi \mapsto \Psi^\circ$: pour $\psi \in \mathfrak{P}(M^\natural)$, on note ψ^δ l'élément de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$ défini par $\psi^\delta(g \cdot \delta) = \psi(g)$, $g \in G$. Pour tout caractère η de M, le groupe $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$ opère sur l'ensemble des η-représentations de $M^\natural$: pour $\Psi \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$, Π une η-représentation de $M^\natural$ et $\delta \in M^\natural$, on pose

$$(\Psi \cdot \Pi)(\delta) = \Psi(\delta)\Pi(\delta), \quad \delta \in M^\natural.$$

On a

$$(\Psi\cdot\Pi)^\circ=\Psi^\circ\Pi^\circ.$$

Remarque 2. — Pour $P\in\mathcal{P}(G^\natural)$, le groupe $\mathfrak{P}(M_P)$ est un tore complexe (de groupe des caractères algébriques M_P/M_P^1), et $\mathfrak{P}(M_P^\natural)=\mathfrak{P}(M_P)^\theta$. Par suite les groupes $\mathfrak{P}(M_P^\natural)$ et $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$ sont des variétés algébriques affines complexes, en fait des groupes algébriques affines diagonalisables sur $\mathbb{C}$. Le morphisme $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)\rightarrow\mathfrak{P}(M_P^\natural)$, $\Psi\mapsto\Psi^\circ$ est algébrique, et pour $\delta\in M_P^\natural$, le morphisme $\mathfrak{P}(M_P^\natural)\rightarrow\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$, $\psi\mapsto\psi^\delta$ est lui aussi algébrique. On note $\mathfrak{P}^0(M_P^\natural)$ et $\mathfrak{P}^0_\mathbb{C}(M_P^\natural)$ les composantes neutres de $\mathfrak{P}(M_P^\natural)$ et $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$. Ce sont des tores complexes, et le morphisme $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)\rightarrow\mathfrak{P}(M_P^\natural)$ induit par restriction un morphisme surjectif $\mathfrak{P}^0_\mathbb{C}(M_P^\natural)\rightarrow\mathfrak{P}^0(M_P^\natural)$ de noyau $\mathbb{C}^\times$. ■

On aura aussi besoin de la variante suivante des constructions précédentes. Pour un caractère non ramifié ξ de M, on note $\mathfrak{P}(M^\natural,\xi)$ le sous–groupe de $\mathfrak{P}(M)$ formé des ψ tels que $\psi\circ\mathrm{Int}_{G^\natural}(\delta)=\xi\psi$ pour un (i.e. pour tout) $\delta\in M^\natural$, et l'on note $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural,\xi)$ le sous–ensemble de $\mathrm{Irr}_\mathbb{C}(M^\natural,\xi)$ formé des Π tels que Π° est un caractère non ramifié de M. Ce caractère appartient à $\mathfrak{P}(M^\natural,\xi)$, et le foncteur d'oubli $\Pi\mapsto\Pi^\circ$ induit une application bijective

$$\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural,\xi)/\mathbb{C}^\times\rightarrow\mathfrak{P}(M^\natural,\xi).$$

L'ensemble $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural,\xi)$ est un espace principal homogène sous $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$, et pour $\Psi\in\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural,\xi)$ et $\delta\in M^\natural$, on peut comme plus haut identifier $\Psi(\delta)$ à un nombre complexe non nul. Enfin pour tout caractère η de M, toute η-représentation Π de $M^\natural$ et tout $\Psi\in\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural,\xi)$, on note $\Psi\cdot\Pi$ la $\xi\eta$–représentation de $M^\natural$ définie comme ci–dessus. On a encore

$$(\Psi\cdot\Pi)^\circ=\Psi^\circ\Pi^\circ.$$

2.12. Quotient de Langlands. — Soit $|\omega|$ le caractère non ramifié de G donné par

$$|\omega|(g)=|\omega(g)|,\quad g\in G,$$

et soit ω_u le caractère unitaire de G tel que

$$\omega=\omega_\mathrm{u}|\omega|.$$

Soit Π une ω–représentation G–irréductible de $G^\natural$. D'après la classification de Langlands, il existe un triplet (P,σ,ξ) formé d'un sous-groupe parabolique standard P de G, d'une représentation irréductible tempérée σ de M_P et d'un caractère non ramifié ξ de M_P qui est positif par rapport à U_P, tels que Σ° est isomorphe à l'unique quotient irréductible de $i_P^G(\xi\sigma)$. L'unicité de la décomposition de Langlands implique que $\theta(P)=P$ et que $\omega^{-1}(\xi\sigma)^\theta$ est isomorphe à σ. Comme la représentation $\omega_\mathrm{u}^{-1}\sigma^\theta$ et le caractère $|\omega|^{-1}\xi^\theta$ de M_P sont respectivement tempérée et positif par rapport à U_P, $\omega_\mathrm{u}^{-1}\sigma^\theta$ est isomorphe à σ et $|\omega|^{-1}\xi^\theta=\xi$. On en déduit qu'il existe une ω_u-représentation M_P–irréductible Σ de $M_P^\natural$ et un élément Ξ de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural,|\omega|)$ tels que $\Sigma^\circ=\sigma$, $\Xi^\circ=\xi$, et Π est l'unique quotient irréductible de ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\cdot\Sigma)$.

Définition. — Une ω–représentation G–irréductible Π de $G^\natural$ est dite *unitaire* s'il existe un produit scalaire hermitien $G^\natural$–invariant sur l'espace de Π, ce qui n'est possible que si le caractère ω est lui–même unitaire. Un tel produit, s'il existe, est a fortiori G–invariant, et la représentation Π° de G sous–jacente à Π est unitaire.

Supposons que $\pi=\Pi^\circ$ est unitaire, et fixons un produit scalaire hermitien G–invariant sur l'espace V de π. Posons

$$(v,v')^\natural=(\Pi(\delta)(v),\Pi(\delta)(v')),\quad v,\,v'\in V,$$

pour un (i.e. pour tout) $\delta \in G^\natural$. Si ω est unitaire, c'est un autre produit scalaire hermitien G–invariant sur V, par suite $(\cdot,\cdot)^\natural = \lambda(\cdot,\cdot)$ pour un nombre réel $\lambda > 0$, et Π est unitaire si et seulement si $\lambda = 1$.

Remarque. — Si Π est une ω–représentation de $G^\natural$, sa contragrédiente $\check{\Pi}$ est définie comme suit. Notant V l'espace de $\pi = \Pi^\circ$ et $\check{V}$ celui de la contragrédiente $\check{\pi}$ de π, on pose

$$\langle v, \check{\Pi}(\delta)(\check{v})\rangle = \langle \Pi(\delta)^{-1}(v), \check{v}\rangle, \quad (v,\check{v}) \in V \times \check{V}.$$

Cela définit une ω^{-1}–représentation $\check{\Pi}$ de $G^\natural$, telle que $\check{\Pi}^\circ = \check{\pi}$. Si de plus π est irréductible et unitaire, alors notant $(\overline{\Pi}, \overline{V})$ la conjuguée complexe de Π — c'est une $\overline{\omega}$–représentation G–irréductible de $G^\natural$ —, l'opérateur $v \mapsto A_v = \langle v, \cdot\rangle$ de $\overline{V}$ dans $\check{V}$ est un isomorphisme de $\overline{\pi}$ sur $\check{\pi}$, et c'est un isomorphisme de $\overline{\Pi}$ sur $\check{\Pi}$ si et seulement si Π est unitaire (auquel cas on a forcément $\overline{\omega} = \omega^{-1}$). ∎

D'après ce qui précède, à toute ω–représentation G–irréductible Π de $G^\natural$ est associée un triplet $(P^\natural, \Sigma, \Xi)$ où :

– $P^\natural$ est un sous–espace parabolique standard de $G^\natural$,
– Σ est une ω_{u}–représentation M_P–irréductible *tempérée* de $M_P^\natural$, c'est–à–dire unitaire et telle que Σ° est tempérée,
– Ξ est un élément de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, |\omega|)$ tel que Ξ° est positif par rapport à U_P.

Un tel triplet est appelé *triplet de Langlands pour* $(G^\natural, \omega)$, et Π est l'unique quotient G–irréductible, donc aussi l'unique quotient irréductible, de l'induite parabolique ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \cdot \Pi)$.

Réciproquement, à tout triplet de Langlands $\mu = (P^\natural, \Sigma, \Xi)$ pour $(G^\natural, \omega)$ est associée une ω–représentation G–irréductible $\Pi = \Pi_\mu$ de $G^\natural$: c'est l'unique quotient irréductible de $\widetilde{\Pi}_\mu = {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \cdot \Sigma)$. En effet, puisque $\mu^\circ = (P, \Sigma^\circ, \Xi^\circ)$ est un triplet de Langlands pour G, la représentation

$$i_P^G(\Xi^\circ\Sigma^\circ) = \widetilde{\Pi}_\mu^\circ$$

de G a un unique quotient irréductible, disons π. Comme la représentation

$$i_P^G(\Xi^\circ\Sigma^\circ)(1) = \omega^{-1} i_P^G(\Xi^\circ\Sigma^\circ)^\theta$$

de G est isomorphe à $i_P^G(\Xi^\circ\Sigma^\circ)$, on a nécessairement

$$\pi(1) \simeq \pi.$$

On en déduit qu'il existe un quotient Π de $\widetilde{\Pi}_\mu$ tel que $\Pi^\circ = \pi$. Ce quotient est l'unique quotient irréductible de $\widetilde{\Pi}_\mu$.

Deux tels triplets de Langlands $(P_1^\natural, \Sigma_1, \Xi_1)$, $(P_2^\natural, \Sigma_2, \Xi_2)$ pour $(G^\natural, \omega)$ sont dits équivalents si $P_1^\natural = P_2^\natural$ et s'il existe un nombre complexe λ de module 1 tels que $\lambda \cdot \Sigma_1 \simeq \Sigma_2$ et $\lambda^{-1}\Xi_1 = \Xi_2$. Comme dans le cas non tordu, l'application

$$\mu \mapsto \Pi_\mu$$

induit une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence de triplets de Langlands pour $(G^\natural, \omega)$ sur $\mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$.

2.13. « Décomposition » de Langlands. — Notons $\mathrm{Irr}_{0,\mathrm{t}}(G^\natural, \omega_{\mathrm{u}})$ le sous–ensemble de $\mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega_{\mathrm{u}})$ formé des éléments tempérés. Il s'identifie à un sous–ensemble de $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega_{\mathrm{u}})$, que l'on note $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C},\mathrm{t}}(G^\natural, \omega_{\mathrm{u}})$ — cf. 2.7 (notations). D'après 2.12, le $\mathbb{Z}$–module $\mathcal{G}_0(G^\natural, \omega)$ est somme directe des $\mathbb{Z}$–modules $\mathbb{Z}\Pi_\mu$ pour μ parcourant les classes d'équivalence de triplets de Langlands pour $(G^\natural, \omega)$. On en déduit la version tordue suivante du théorème de la base de Langlands (qu'il convient d'appeler « décomposition » de Langlands, cf. la remarque ci–dessous).

Lemme 1. — *On a la décomposition dans* $\mathcal{G}(G^\natural,\omega)$

$$\mathcal{G}(G^\natural,\omega)=\sum_\mu \mathbb{Z}\widetilde{\Pi}_\mu+\mathcal{G}_{>0}(G^\natural,\omega)$$

où μ *parcourt les classes d'équivalence de triplets de Langlands pour* $(G^\natural,\omega)$.

Démonstration. — Puisque $\mathcal{G}(G^\natural,\omega)=\mathcal{G}_0(G^\natural,\omega)\oplus\mathcal{G}_{>0}(G^\natural,\omega)$, il suffit de montrer que $\mathcal{G}_0(G^\natural,\omega)$ est contenu dans l'expression à droite de l'égalité dans l'énoncé. Soit donc Π une ω–représentation G–irréductible de $G^\natural$, et soit $(P^\natural,\Sigma,\Xi)$ un triplet de Langlands pour $(G^\natural,\omega)$ associé à Π. Posons $\sigma=\Sigma^\circ$, $\xi=\Xi^\circ$, et soit $(M_{P'},\sigma')$ une paire cuspidale standard de G telle que $P'\subset P$ et $\xi\sigma$ est isomorphe à un sous–quotient de l'induite parabolique $i_{P'}^P(\sigma')$. Chaque composant — i.e. classe d'isomorphisme d'un sous–quotient irréductible — de $i_P^G(\xi\sigma)={}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\cdot\Sigma)^\circ$ est aussi un composant de $i_{P'}^G(\sigma')$. Dans $\mathcal{G}(G^\natural,\omega)$, écrivons

$$\Pi\equiv{}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\cdot\Sigma)-\sum_{i=1}^n\Pi_i\pmod{\mathcal{G}_{>0}(G^\natural,\omega)}$$

où les Π_i sont des éléments de $\mathrm{Irr}_0(G^\natural,\omega)$ tels que $\theta_G(\Pi_i^\circ)=[M_{P'},\sigma']$. On refait ensuite la même chose avec chacun des Π_i :

$$\Pi_i\equiv{}^\omega i_{P_i^\natural}^{G^\natural}(\Xi_i\cdot\Sigma_i)-\sum_{j=1}^{n_i}\Pi_{i,j}\pmod{\mathcal{G}_{>0}(G^\natural,\omega)}.$$

Puisque l'application $\theta_G:\mathrm{Irr}(G)\to\Theta(G)$ est à fibres finies, d'après le résultat bien connu de Borel–Wallach [**BW**, 4.3], le processus de décomposition s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes. On obtient donc une décomposition de la forme

$$\Pi\equiv\sum_{i=1}^m\widetilde{\Pi}_{\mu_i}\pmod{\mathcal{G}_{>0}(G^\natural,\omega)},$$

où les μ_i sont des triplets de Langlands pour $(G^\natural,\omega)$ (qui ne sont pas forcément deux–à–deux non équivalents). □

Remarque. — D'après le théorème de la base de Langlands pour G, la somme $\sum_\mu\mathbb{Z}\widetilde{\Pi}_\mu$ est directe, mais sa projection sur $\mathcal{G}_0(G^\natural,\omega)=\mathcal{G}(G^\natural,\omega)/\mathcal{G}_{>0}(G^\natural,\omega)$ ne l'est en général pas. En effet si μ est un triplet de Langlands pour $(G^\natural,\omega)$ tel que la ω–représentation $\widetilde{\Pi}_\mu$ de $G^\natural$ est réductible, les composants irréductibles de $\widetilde{\Pi}_\mu$ ne sont pas forcément G–irréductibles. ■

Un triplet de Langlands $(P^\natural,\Sigma,\Xi)$ pour $(G^\natural,\omega)$ est dit *induit* si $P^\natural\neq G^\natural$. Une ω–représentation G–irréductible Π de $G^\natural$ est dite *essentiellement tempérée* s'il existe un $\Psi\in\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural,|\omega|^{-1})$ tel que la ω_{u}–représentation $\Psi\cdot\Pi$ de $G^\natural$ est tempérée, c'est–à–dire si Π est isomorphe à $\Pi_\mu=\widetilde{\Pi}_\mu$ pour un μ non induit. De manière équivalente, Π est essentiellement tempérée si Π° est une représentation essentiellement tempérée de G. On note $\mathrm{Irr}_{0,\mathrm{e.t}}(G^\natural,\omega)$ le sous–ensemble de $\mathrm{Irr}_0(G^\natural,\omega)$ formé des éléments essentiellement tempérés. On note aussi :

- $\mathcal{G}_{\mathrm{e.t}}(G^\natural,\omega)$ le sous–groupe de $\mathcal{G}(G^\natural,\omega)$ engendré par les $\iota_k(\mathrm{Irr}_{0,\mathrm{e.t}}(\mathcal{G}_k,\omega_k))$ pour un entier $k\geq 1$ — il est stable sous $\mathbb{C}^\times$;
- $\mathcal{G}_{L-\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega)$ le sous–groupe de $\mathcal{G}(G^\natural,\omega)$ engendré par les $\iota_k(\widetilde{\Pi}_\mu)$ pour un entier $k\geq 1$ et un triplet de Langlands induit μ pour $(G_k^\natural,\omega_k)$ — lui aussi est stable sous $\mathbb{C}^\times$;
- $\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{e.t}}(G^\natural,\omega)$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{C},L-\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega)$ leurs projections respectives dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ — deux sous–espaces vectoriels de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$.

D'après le lemme de 2.7, $\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{e.t}}(G^\natural,\omega)$ est le sous–espace vectoriel de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ engendré par $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C},\mathrm{e.t}}(G^\natural,\omega)=\mathrm{Irr}_{0,\mathrm{e.t}}(G^\natural,\omega)$, et $\mathcal{G}_{\mathbb{C},L-\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega)$ est le sous–espace vectoriel de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ engendré par les projections des $\widetilde{\Pi}_\mu$ dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$, où μ parcourt les triplets de Langlands induits pour $(G^\natural,\omega)$.

D'après le lemme 1 et le théorème de la base de Langlands pour G, on a la décomposition en somme directe

$$\mathcal{G}(G^\natural,\omega)=\mathcal{G}_{\mathrm{e.t}}(G^\natural,\omega)\oplus\mathcal{G}_{L-\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega).$$

On en déduit le

Lemme 2. — *On a la décomposition en somme directe*

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)=\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{e.t}}(G^\natural,\omega)\oplus\mathcal{G}_{\mathbb{C},L-\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega).$$

Démonstration. — Pour alléger l'écriture, posons $\mathcal{G}_{0^+}=\mathcal{G}_{0^+}(G^\natural,\omega)$, $\mathcal{G}_{\mathrm{e.t}}=\mathcal{G}_{\mathrm{e.t}}(G^\natural,\omega)$, etc. Il s'agit d'établir l'inclusion

$$(*)\qquad \mathcal{G}_{0^+}\subset(\mathcal{G}_{\mathrm{e.t}}\cap\mathcal{G}_{0^+})+(\mathcal{G}_{L-\mathrm{ind}}\cap\mathcal{G}_{0^+}).$$

Soit un élément Π de $\mathrm{Irr}_{k-1}(G^\natural,\omega)$ pour un entier $k>1$, et soit $\Sigma\in\mathrm{Irr}_0(\mathcal{G}_k,\omega_k)$ tel que $\Pi=\iota_k(\Sigma)$. Dans $\mathcal{G}(\mathcal{G}_k,\omega_k)$, Σ se décompose en $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, où $\Sigma_1\in\mathcal{G}_{\mathrm{e.t}}(\mathcal{G}_k,\omega_k)$ et $\Sigma_2\in\mathcal{G}_{L-\mathrm{ind}}(\mathcal{G}_k,\omega_k)$. Alors $\Pi=\iota_k(\Sigma_1)+\iota_k(\Sigma_2)$, et d'après le lemme de 2.7, Π appartient à la somme à droite de l'inclusion $(*)$.

Soit un élément Π' de $\mathrm{Irr}_0(G^\natural,\omega)$ et des nombres complexes non nuls $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, $n>1$, tels que $\sum_{i=1}^n\lambda_i=0$. Écrivons $\Pi'=\Pi'_1+\Pi'_2$, où $\Pi'_1\in\mathcal{G}_{\mathrm{e.t}}$ et $\Pi'_2\in\mathcal{G}_{L-\mathrm{ind}}$. Alors $\Pi=\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot\Pi'$ s'écrit $\Pi=\Pi_1+\Pi_2$, où $\Pi_1=\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot\Pi'_1$ et $\Pi_2=\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot\Pi'_2$, par conséquent Π appartient à la somme à droite de l'inclusion $(*)$.

L'inclusion $(*)$ étant vérifiée, le lemme est démontré. □

2.14. Support cuspidal et caractères infinitésimaux. — Soit $A_\circ$ le tore déployé maximal (du centre) de $M_\circ$. On a $Z_G(A_\circ)=M_\circ$, et le normalisateur $N_G(A_\circ)$ de $A_\circ$ dans G coïncide avec $N_G(M_\circ)$. On note W_G le groupe de Weyl de G défini par

$$W_G=N_G(A_\circ)/M_\circ.$$

Soit π une représentation irréductible π de G. À π est associée une *paire cuspidale standard* (M_P,ρ) de G, où $P\in\mathcal{P}(G)$ et ρ est une représentation irréductible cuspidale de M_P, telle que π est isomorphe à un sous–quotient de $i_P^G(\rho)$. Si $(M_{P'},\rho')$ est une autre paire cuspidale standard de G telle que π est isomorphe à un sous–quotient de $i_{P'}^G(\rho')$, alors il existe un élément w de W_G tel que $w(M_P)=M_{P'}$ et ${}^{n_w}\rho\simeq\rho'$, où :

– n_w est un représentant de w dans $N_G(A_\circ)$,
– ${}^{n_w}\rho$ est la représentation $\rho\circ\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(n_w^{-1})$ de $w(M_P)=\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(n_w)(M_P)$.

Pour $X\subset G$ et $g\in G$, on pose ${}^gX=\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(g)(X)$. Deux paires cuspidales — standard ou non — (M,ρ) et (M',ρ') de G telles que $M'={}^gM$ et $\rho'\simeq{}^g\rho$ pour un $g\in G$ sont dites G–*équivalentes* ou simplement *équivalentes*, et l'on note $[M,\rho]=[M,\rho]_G$ la classe d'équivalence de (M,ρ). Toute paire cuspidale de G est équivalente à une paire cuspidale standard. La classe d'équivalence d'une paire cuspidale standard (M_P,ρ) de G telle que π est isomorphe à un sous–quotient de $i_P^G(\rho)$ est appelée *support cuspidal de* π, et notée $\theta_G(\pi)$.

Pour une paire cuspidale (M,ρ) de G, on note $\rho(1)$ la représentation $\omega^{-1}\rho^\theta$ de $\theta^{-1}(M)$. On obtient ainsi une autre paire cuspidale

$$(M,\rho)(1)=(\theta^{-1}(M),\rho(1))$$

de G, dont la classe de G–équivalence, notée $[M,\rho](1)$, ne dépend pas du choix de $\delta_1 \in M_\circ^\natural$. Notons que si (M,ρ) est standard, i.e. si $M = M_P$ pour un $P \in \mathcal{P}(G)$, alors $(M,\rho)(1)$ est aussi standard, puisque $\theta^{-1}(M_P) = M_{\theta^{-1}(M_P)P_1}$.

Soit Π une ω–représentation G–irréductible de $G^\natural$. Posons $\pi = \Pi^\circ$, et soit (M_P,ρ) une paire cuspidale standard de G telle que $\theta_G(\pi) = [M_P,\rho]$. Puisque π est isomorphe à $\pi(1)$, c'est un sous–quotient de $i^G_{\theta^{-1}(P)}(\rho(1))$, et aussi un sous–quotient de $i^G_{\theta^{-1}(M_P)P_1}(\rho(1))$. Par suite les paires cuspidales standard (M_P,ρ) et $(M_P,\rho)(1)$ de G sont équivalentes : il existe un élément $w \in W_G$ tel que $w(M_P) = \theta^{-1}(M_P)$ et ${}^{n_w}\rho \simeq \rho(1)$. En d'autres termes, posant $\tau = \theta \circ \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(n_w)$, on a $\tau(M_P) = M_P$ et $\omega^{-1}\rho^\tau \simeq \rho$.

On note $\Theta(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de paires cuspidales de G, et $\Theta_1(G)$ le sous–ensemble de $\Theta(G)$ formé des $[M,\rho]$ tels que $[M,\rho](1) = [M,\rho]$. L'application support cuspidal

$$\theta_G : \mathrm{Irr}(G) \to \Theta(G)$$

induit une application

$$\mathrm{Irr}_0(G^\natural,\omega)/\mathbb{C}^\times \to \Theta_1(G),\, \Pi \mapsto \theta_{G^\natural}(\Pi) = \theta_G(\Pi^\circ),$$

dont l'image est notée $\Theta_{G^\natural,\omega}(G)$. Notons que pour qu'une paire cuspidale standard (M_P,ρ) de G telle que $[M_P,\rho](1) = [M_P,\rho]$ soit dans l'image de $\theta_{G^\natural}$, il faut et il suffit que l'induite parabolique $\pi = i^G_P(\rho)$ — qui est isomorphe à $\pi(1)$ — possède un sous–quotient irréductible π' tel que $\pi'(1) \simeq \pi'$.

L'application $[M,\rho] \mapsto [M,\rho](1)$ définit comme en 2.6 une action de $\mathbb{Z}$ sur $\Theta(G)$. On note $\Theta(G)/\mathbb{Z}$ l'ensemble des orbites de $\mathbb{Z}$ pour cette action, et l'on identifie $\Theta_1(G)$ à un sous–ensemble de $\Theta(G)/\mathbb{Z}$. L'application θ_G est $\mathbb{Z}$-équivariante, et l'application $\Pi \mapsto \theta_{G^\natural}(\Pi)$ se prolonge en une application surjective

$$\theta_{G^\natural} : \mathrm{Irr}(G^\natural,\omega)/\mathbb{C}^\times \to \Theta(G)/\mathbb{Z},$$

définie comme suit. Pour une ω–représentation irréductible Π de $G^\natural$, on choisit une sous–représentation irréductible π_0 de Π°, et l'on note $\theta_{G^\natural}(\Pi)$ la $\mathbb{Z}$–orbite de $\theta_G(\pi_0)$ dans $\Theta(G)$. Cette $\mathbb{Z}$–orbite est bien définie — i.e. elle ne dépend pas du choix de π_0 — et dépend seulement de la classe d'isomorphisme de Π.

2.15. Support inertiel. — Deux paires cuspidales (M,ρ) et (M',ρ') de G sont dites *inertiellement équivalentes* s'il existe un caractère non ramifié ψ' de M' tel que ${}^gM = M'$ et ${}^g\rho \simeq \psi'\rho'$ pour un $g \in G$.

Soit $\mathfrak{B}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence inertielle de paires cuspidales de G. Pour $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$, on note $\Theta(\mathfrak{s}) \subset \Theta(G)$ la fibre au-dessus de $\mathfrak{s}$. Si $\mathfrak{s}$ est la classe d'équivalence inertielle d'une paire cuspidale (M,ρ) de G, alors $\Theta(\mathfrak{s})$ est un espace homogène sous le tore complexe $\mathfrak{P}(M)$ — pour $\psi \in \mathfrak{P}(M)$, on pose $\psi \cdot [M,\rho] = [M,\psi\rho]$ —, et en particulier une variété algébrique affine complexe. Précisément, notons $\mathfrak{P}(M)(\rho)$ la $\mathfrak{P}(M)$–orbite de ρ dans $\mathrm{Irr}(M)$, c'est–à–dire l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de M de la forme $\psi\rho$ pour un $\psi \in \mathfrak{P}(M)$. C'est une variété algébrique affine complexe (le quotient de $\mathfrak{P}(M)$ par un groupe fini). Posons

$$W_G(M) = N_G(M)/M$$

et

$$W_\mathfrak{s} = \{w \in W_G(M) : {}^{n_w}\rho \simeq \psi\rho,\ \exists \psi \in \mathfrak{P}(M)\},$$

où n_w désigne un représentant de w dans $N_G(M)$. Le groupe $W_\mathfrak{s}$ opère sur la variété $\mathfrak{P}(M)(\rho)$, et l'application $\psi\rho \mapsto [M,\psi\rho]$ est un isomorphisme de la variété quotient $\mathfrak{P}(M)(\rho)/W_\mathfrak{s}$ sur $\Theta(\mathfrak{s})$.

L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\Theta(G)$ préserve les fibres de l'application $\Theta(G) \to \mathfrak{B}(G)$, donc induit une action sur $\mathfrak{B}(G)$, notée $(k, \mathfrak{s}) \mapsto \mathfrak{s}(k)$: si $\mathfrak{s}$ est la classe inertielle d'une paire cuspidale (M, ρ) de G, alors $\mathfrak{s}(k)$ est la classe inertielle de $(\theta^{-k}(M), \rho(k))$. On note $\mathfrak{B}_1(G)$ le sous–ensemble de $\mathfrak{B}(G)$ formé des $\mathfrak{s}$ tels que $\mathfrak{s}(1) = \mathfrak{s}$, i.e. tels que la fibre $\Theta(\mathfrak{s})$ au-dessus de $\mathfrak{s}$ est $\mathbb{Z}$–stable.

Lemme. — *Pour $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_1(G)$, l'ensemble*

$$\Theta_1(\mathfrak{s}) = \Theta(\mathfrak{s}) \cap \Theta_1(G)$$

est une sous–variété algébrique fermée (éventuellement vide) de $\Theta(\mathfrak{s})$.

Démonstration. — On peut supposer $\Theta_1(\mathfrak{s})$ non vide sinon il n'y a rien à démontrer. Soit (M_P, ρ) une paire cuspidale standard de G telle que $[M_P, \rho] \in \Theta_1(\mathfrak{s})$, et soit $w \in W_G$ tel que $\rho(1) \simeq {}^{n_w}\rho$. D'après 2.14, posant $\tau = \theta \circ \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(n_w)$, on a $\tau(M_P) = M_P$ et $\omega^{-1}\rho^\tau \simeq \rho$. De même pour $\psi \in \mathfrak{P}(M_P)$, la classe $[M_P, \psi\rho]$ appartient à $\Theta_1(\mathfrak{s})$ si et seulement s'il existe un élément w_ψ de W_G tel que, posant $\tau_\psi = \theta \circ \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(n_{w_\psi})$, on a $\tau_\psi(M_P) = M_P$ et $\omega^{-1}(\psi\rho)^{\tau_\psi} \simeq \psi\rho$. Puisque

$$w(M_P) = \theta^{-1}(M_P) = w_\psi(M_P),$$

il existe un $s_\psi \in N_G(M_P)$ tel que $n_{w_\psi} = n_w s_\psi$. On a donc $\tau_\psi = \tau \circ \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(s_\psi)$, et comme

$$\omega^{-1}(\psi\rho)^{\tau_\psi} = (\psi^\tau \omega^{-1}\rho^\tau)^{\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(s_\psi)} \simeq (\psi^\tau\rho)^{\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(s_\psi)}$$

est isomorphe à $\psi\rho$, on a

$${}^{s_\psi}\rho \simeq ({}^{s_\psi}\psi)^{-1}\psi^\tau\rho.$$

En particulier, $\bar{s}_\psi = s_\psi \ (\mathrm{mod}\, M_P)$ appartient au sous–groupe $W_{\mathfrak{s}}$ de $W_G(M_P)$, et $({}^{\bar{s}_\psi}\psi)^{-1}\psi^\tau$ stabilise $[M_P, \rho]$. Réciproquement, supposons qu'il existe un $s \in N_G(M_P)$ tel que ${}^s\rho$ est isomorphe à $({}^s\psi)^{-1}\psi^\tau\rho$. Alors

$${}^s(\psi\rho) \simeq \psi^\tau\rho \simeq \psi^\tau(\omega^{-1}\rho^\tau) = \omega^{-1}(\psi\rho)^\tau,$$

et $[M_P, \psi\rho]$ appartient à $\Theta_1(\mathfrak{s})$. En définitive, on a montré qu'un élément $[M_P, \psi\rho]$ de $\Theta(\mathfrak{s})$ appartient à $\Theta_1(\mathfrak{s})$ si et seulement s'il existe un $s \in N_G(M_P)$ tel que ${}^s(\psi\rho) \simeq \psi^\tau\rho$. Puisque le groupe $W_G(M_P)$ est fini, cette condition définit une sous–variété algébrique fermée de $\Psi(M_P)(\rho)$. Comme le morphisme $\Psi(M)(\rho) \to \Theta(\mathfrak{s})$, $\psi\rho \mapsto [M_P, \psi\rho]$ est quasi–fini, il est fini (par homogénéité), donc fermé. D'où le lemme. □

L'application support inertiel

$$\beta_G : \mathrm{Irr}(G) \to \mathfrak{B}(G)$$

induit une application

$$\mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)/\mathbb{C}^\times \to \mathfrak{B}_1(G),\ \Pi \mapsto \beta_{G^\natural}(\Pi) = \beta_G(\Pi^\circ),$$

dont l'image est notée $\mathfrak{B}_{G^\natural,\omega}(G)$.

Remarque. — Soit $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_1(G)$, et soit (M_P, ρ) une paire cuspidale standard de G telle que $[M_P, \rho] \in \Theta(\mathfrak{s})$. On sait qu'il existe un sous–ensemble Zariski–dense $\mathcal{V}$ de $\Theta(\mathfrak{s})$, que l'on peut supposer $\mathbb{Z}$–stable, tel pour tout $[M_P, \rho'] \in \mathcal{V}$, la représentation $i_P^G(\rho')$ — définie seulement à isomorphisme près — est irréductible. Si l'intersection $\mathcal{V} \cap \Theta_1(G)$ est non vide, alors $\mathfrak{s}$ est dans l'image de $\beta_{G^\natural}$. ■

Comme en 2.14, on note $\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$ l'ensemble des orbites de $\mathbb{Z}$ dans $\mathfrak{B}(G)$, et l'on identifie $\mathfrak{B}_1(G)$ à un sous–ensemble de $\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$. L'application β_G est $\mathbb{Z}$–équivariante, et l'application $\Pi \mapsto \beta_{G^\natural}(\Pi)$ se prolonge comme en loc. cit. en une application surjective

$$\beta_{G^\natural} : \mathrm{Irr}(G^\natural, \omega)/\mathbb{C}^\times \to \mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}.$$

2.16. Le « centre » (rappels, cas non tordu). — Le centre d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est par définition l'anneau des endomorphisme du foncteur identique de $\mathcal{A}$. On le note $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$. Un élément de z de $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$ est la donnée, pour chaque objet E de $\mathcal{A}$, d'une flèche $z_E : E \to E$ dans $\mathcal{A}$, de sorte que pour toute flèche $u : E_1 \to E_2$ dans $\mathcal{A}$, on ait

$$u \circ z_{E_1} = z_{E_2} \circ u.$$

Notons $\mathfrak{Z}(G)$ le centre de la catégorie $\mathfrak{R}(G)$. Rappelons que $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G)$ est une $\mathbb{C}$–algèbre *à idempotent* (cf. [**BD**, 1.1]), et que l'application $(\pi, V) \mapsto V$ est un isomorphisme de $\mathfrak{R}(G)$ sur la catégorie des $\mathcal{H}$-modules (à gauche) non dégénérés. On peut voir $\mathcal{H}$ comme un $\mathcal{H}$–module non dégénéré pour la multiplication à gauche. Pour chaque élément $z \in \mathfrak{Z}(G)$, on a donc un élément $z_{\mathcal{H}} \in \mathrm{End}_G(\mathcal{H})$. D'après [**BD**, 1.5], l'application $z \mapsto z_{\mathcal{H}}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{Z}(G)$ sur le commutant $\mathrm{End}_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{H})$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H})$ des multiplications à gauche et à droite. Pour $z \in \mathfrak{Z}(G)$ et $f \in \mathcal{H}$, on pose $z \cdot f = z_{\mathcal{H}}(f)$.

Pour $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$, notons $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{R}(G)$ formée des représentations π telles que $\beta_G(\pi') = \mathfrak{s}$ pour tout sous-quotient irréductible π' de π. D'après [**BD**, 2.10], $\mathfrak{R}(G)$ est le produit des catégories $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ pour $\mathfrak{s}$ parcourant les éléments de $\mathfrak{B}(G)$. En d'autres termes, toute représentation π de G s'écrit comme une somme directe $\pi = \oplus_\mathfrak{s}\pi_\mathfrak{s}$ où $\mathfrak{s}$ parcourt les éléments de $\mathfrak{B}(G)$ et $\pi_\mathfrak{s}$ est un objet de $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$, et si $\pi' = \oplus_\mathfrak{s}\pi'_\mathfrak{s}$ est une autre représentation de G, on a

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi') = \oplus_\mathfrak{s}\mathrm{Hom}_G(\pi_\mathfrak{s}, \pi'_\mathfrak{s}).$$

On note $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s} = \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G)$ le centre de la catégorie $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$. On a la décomposition en produit d'anneaux

$$\mathfrak{Z}(G) = \prod_\mathfrak{s} \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}.$$

Pour toute partie $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{B}(G)$, on pose

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{S}(G) = \prod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} \mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G), \quad \mathfrak{Z}_\mathfrak{S}(G) = \prod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}.$$

Fixons un élément $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$, et choisissons une paire cuspidale standard (M_P, ρ) de G telle que $[M_P, \rho] \in \Theta(\mathfrak{s})$. Rappelons que M_P^1 est le sous–groupe de M_P engendré par ses sous–groupes ouverts compacts. Posons $\Lambda_P = M_P/M_P^1$. C'est un $\mathbb{Z}$–module libre de type fini, et l'on a $\mathfrak{P}(M_P) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda_P, \mathbb{C}^\times)$. En d'autres termes, Λ_P est le groupe des caractères algébriques du tore complexe $\mathfrak{P}(M_P)$. Soit $B_P = \mathbb{C}[\Lambda_P]$ l'algèbre affine de $\mathfrak{P}(M_P)$, et soit $\varphi_P : M_P \to B_P$ le « caractère universel » donné par l'évaluation :

$$\varphi_P(m)(\psi) = \psi(m), \quad m \in M_P,\ \psi \in \mathfrak{P}(M_P).$$

C'est aussi le composé de la projection canonique $M_P \to \Lambda_P$ et de l'inclusion $\Lambda_P \hookrightarrow B_P$. Soit ρ_{B_P} la représentation de M_P définie comme suit : l'espace de ρ_{B_P} est $W = V_\rho \otimes_\mathbb{C} B_P$, et pour $m \in M_P$, $v \in V_\rho$ et $b \in B_P$, on pose

$$\rho_{B_P}(m)(v \otimes b) = \rho(m)(v) \otimes \varphi_P(m)b.$$

Notons π la représentation $i_P^G(\rho_{B_P})$ de G. L'anneau B_P opère naturellement sur l'espace V de π, et pour $\psi \in \mathfrak{P}(M_P)$ correspondant à $u \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(B_P, \mathbb{C})$ — i.e. tels que $\psi = u \circ \varphi_P$ — la localisation π_ψ de π en ψ, c'est–à–dire la représentation de G déduite de π sur l'espace

$V_\psi = V \otimes_{B_P,u} \mathbb{C}$, est isomorphe à $i_P^G(\psi\rho)$. Soit maintenant z un élément de $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$. D'après [**BD**, 1.17], l'endomorphisme z_π de π est la multiplication par un élément de B_P, disons b, et pour chaque $\psi \in \mathfrak{P}(M_P)$, l'endomorphisme z_{π_ψ} de π_ψ est la multiplication par $b(\psi)$. De plus (loc. cit.), si ψ, $\psi' \in \mathfrak{P}(M_P)$ sont tels que ${}^{n_w}(\psi\rho) \simeq \psi'\rho$ pour un $w \in W_G(M_P)$, alors $b(\psi) = b(\psi')$. Par conséquent la fonction $\psi \mapsto b(\psi)$ sur $\mathfrak{P}(M_P)$ se descend en une fonction régulière sur la variété $\Theta(\mathfrak{s})$, disons f_z. Le théorème 2.13 de [**BD**] dit que l'application

$$\mathfrak{Z}_\mathfrak{s} \to \mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})],\ z \mapsto f_z$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Remarque. — Soit $z \in \mathfrak{Z}(G)$, décomposé en $z = \prod_\mathfrak{s} z_\mathfrak{s}$, $z_\mathfrak{s} \in \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$. Pour toute représentation irréductible π de G telle que $\beta_G(\pi) = \mathfrak{s}$, on a

$$z_\pi = f_{z_\mathfrak{s}}(\theta_G(\pi))\mathrm{id}_{V_\pi}. \qquad \blacksquare$$

2.17. L'anneau $\mathfrak{Z}(G^\natural,\omega)$. — On l'a dit plus haut, l'action de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathrm{Irr}(G^\natural,\omega)$ provient d'une action fonctorielle sur $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$, triviale sur les flèches. Par dualité on obtient une action sur l'anneau des endomorphismes du foncteur identique de $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$. Soit $\mathfrak{Z}(G^\natural,\omega)$ l'anneau des endomorphismes $\mathbb{C}^\times$–*invariants* du foncteur identique de $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$. Un élément $\mathcal{Z}$ de $\mathfrak{Z}(G^\natural,\omega)$ est par définition la donnée, pour chaque ω–représentation Π de $G^\natural$, d'un endomorphisme $\mathcal{Z}_\Pi$ de Π tel que $\mathcal{Z}_{\lambda\cdot\Pi} = \mathcal{Z}_\Pi$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, de sorte que pour tout morphisme $u : \Pi \to \Pi'$ entre deux ω–représentations Π et Π' de $G^\natural$, on ait

$$u \circ \mathcal{Z}_\Pi = \mathcal{Z}_{\Pi'} \circ u.$$

Soit (Π, V) une ω–représentation de $G^\natural$. Décomposons Π° en

$$\Pi^\circ = \oplus_\mathfrak{S}(\Pi^\circ)_\mathfrak{S}$$

où $\mathfrak{S}$ parcourt les éléments de $\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$, et $(\Pi^\circ)_\mathfrak{S}$ est un objet de $\mathfrak{R}_\mathfrak{S}(G)$. Pour chaque $\mathbb{Z}$-orbite $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{B}(G)$, l'opérateur $\Pi(\delta_1)$ envoie $\Pi^\circ_\mathfrak{S}$ sur $\Pi^\circ_\mathfrak{S}(1) = \Pi^\circ_\mathfrak{S}$, par conséquent Π se décompose en

$$\Pi = \oplus_\mathfrak{S}\Pi_\mathfrak{S}, \quad \Pi^\circ_\mathfrak{S} = (\Pi_\mathfrak{S})^\circ,$$

et si $\Pi' = \oplus_\mathfrak{S}\Pi'_\mathfrak{S}$ est une autre ω–représentation de $G^\natural$, on a

$$\mathrm{Hom}_{G^\natural}(\Pi,\Pi') = \oplus_\mathfrak{S}\mathrm{Hom}_{G^\natural}(\Pi_\mathfrak{S},\Pi'_\mathfrak{S}).$$

Pour une partie $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$, on note $\mathfrak{R}_\mathfrak{S}(G^\natural,\omega)$ la sous–catégorie pleine de $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$ formée des Π tels que Π° est un objet de $\mathfrak{R}_\mathfrak{S}(G)$, ou — ce qui revient au même — tels que $\beta_{G^\natural}(\Pi') \in \mathfrak{S}$ pour tout sous–quotient irréductible Π' de Π. Elle est stable sous l'action de $\mathbb{C}^\times$. On note $\mathfrak{Z}_\mathfrak{S}(G^\natural,\omega)$ le sous–anneau de $\mathfrak{Z}(G^\natural,\omega)$ formé des endomorphismes $\mathbb{C}^\times$–invariants du foncteur identique de $\mathfrak{R}_\mathfrak{S}(G^\natural,\omega)$. D'après ce qui précède, $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$ est le produit des catégories $\mathfrak{R}_\mathfrak{S}(G^\natural,\omega)$ pour $\mathfrak{S}$ parcourant les éléments de $\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$. Par suite on a la décomposition en produit d'anneaux

$$\mathfrak{Z}(G^\natural,\omega) = \prod_{\mathfrak{S}\in\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}} \mathfrak{Z}_\mathfrak{S}(G^\natural,\omega).$$

Posons

$$\mathfrak{R}_0(G^\natural,\omega) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}_0}(G^\natural,\omega), \quad \mathfrak{S}_0 = \mathfrak{B}_{G^\natural,\omega}(G).$$

Toute ω–représentation G–irréductible de $G^\natural$ est un objet de $\mathfrak{R}_0(G^\natural,\omega)$, et $\mathfrak{R}_0(G^\natural,\omega)$ est le produit des catégories $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega)$ pour $\mathfrak{s}$ parcourant les éléments de $\mathfrak{B}_{G^\natural,\omega}(G)$. Ainsi, pour décrire l'anneau

$$\mathfrak{Z}_0(G^\natural,\omega) = \prod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}_0} \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega)$$

des endomorphismes $\mathbb{C}^\times$–invariants du foncteur identique de $\mathfrak{R}_0(G^\natural,\omega)$, il suffit de décrire chacun des anneaux $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega)$.

2.18. Action de $\mathbb{Z}$ sur le « centre ». — L'application $(k,\pi)\mapsto\pi(k)$ définit une action fonctorielle de $\mathbb{Z}$ sur $\mathfrak{R}(G)$, triviale sur les flèches. On en déduit une action $(k,z)\mapsto z(k)$ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathfrak{Z}(G)$: pour $z\in\mathfrak{Z}(G)$ et $k\in\mathbb{Z}$, $z(k)$ est l'élément de $\mathfrak{Z}(G)$ donné par

$$z(k)_\pi = z_{\pi(k)}.$$

Pour $k\in\mathbb{Z}$, l'application $\mathfrak{Z}(G)\to\mathfrak{Z}(G)$, $z\mapsto z(k)$ est un automorphisme d'anneau (et même de $\mathbb{C}$–algèbre). On note $\mathfrak{Z}_1(G)$ le sous–anneau de $\mathfrak{Z}(G)$ formé des z tels que $z(1)=z$. Pour $z\in\mathfrak{Z}(G)$ et Π une ω–représentation de $G^\natural$, on a

$$z_{\Pi^\circ(1)}\circ\Pi(\delta_1)=\Pi(\delta_1)\circ z_{\Pi^\circ}.$$

En particulier si $z(1)=z$, alors $z_{\Pi^\circ(1)}=z_{\Pi^\circ}$ est un endomorphisme de Π.

Remarque 1. — L'application $\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, $f\mapsto\omega f^\theta$ est un automorphisme d'anneau, disons τ. Pour toute représentation π de $\mathfrak{R}(G)$, on a $\pi(k)(f)=\pi(\tau^{-k}(f))$, $k\in\mathbb{Z}$, $f\in\mathcal{H}$. On en déduit que l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathfrak{Z}(G)$, identifié à $\mathrm{End}_{\mathcal{H},\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{H})$ via l'isomorphisme $z\mapsto z_\mathcal{H}$, est donnée par $z(k)\cdot f = z\cdot\tau^{-k}(f)$. Soit $\mathcal{H}(\tau-1)$ le sous–espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par les fonctions $f*(\tau(h)-h)$ pour f, $h\in\mathcal{H}$. C'est un idéal bilatère τ–stable de $\mathcal{H}$. Puisque $z(1)_\mathcal{H}=z_\mathcal{H}\circ\tau^{-1}$, un élément z de $\mathfrak{Z}(G)$ appartient à $\mathfrak{Z}_1(G)$ si et seulement s'il s'annule sur $\mathcal{H}(\tau-1)$. Notons $\overline{\mathcal{H}}_1=\overline{\mathcal{H}}_1(G)$ le $\mathcal{H}$–bimodule quotient $\mathcal{H}/\mathcal{H}(\tau-1)$. L'isomorphisme $z\mapsto z_\mathcal{H}$ identifie donc $\mathfrak{Z}_1(G)$ au sous–anneau $\mathrm{End}_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}(\overline{\mathcal{H}}_1)$ de $\mathrm{End}_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{H})$. ■

Soit $\mathfrak{s}$ un élément de $\mathfrak{B}_1(G)$. L'anneau $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ est $\mathbb{Z}$–stable, et l'on note $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}=\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}(G)$ le sous–anneau de $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ formé des z tels que $z(1)=z$. La variété $\Theta(\mathfrak{s})$ est elle–aussi $\mathbb{Z}$–stable, et l'isomorphisme $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}\to\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]$, $z\mapsto f_z$ se restreint en un isomorphisme d'anneaux

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}\to\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]^\mathbb{Z},$$

où $\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]^\mathbb{Z}$ désigne le sous–anneau de $\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s}]$ formé des fonctions $\mathbb{Z}$–invariantes.

On définit comme suit une application

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}\to\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega),\ z\mapsto\iota(z).$$

Pour $z\in\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}$ et Π un objet de $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega)$, l'endomorphisme z_{Π° de Π° est en fait un endomorphisme de Π, et puisque $(\lambda\cdot\Pi)^\circ=\Pi^\circ$ pour tout $\lambda\in\mathbb{C}^\times$, c'est un élément de $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega)$. On pose $\iota(z)_\Pi=z_{\Pi^\circ}$. L'application ι ainsi définie est un morphisme d'anneaux, et il est bijectif. En effet, on définit comme suit son inverse $\mathcal{Z}\mapsto\mathcal{Z}^\circ$. Pour $\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega)$ et π un objet irréductible de $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$, on pose $\widetilde{\pi}=\pi\oplus\pi(1)\oplus\cdots\oplus\pi(s-1)$ si $s=s(\pi)<+\infty$ et $\widetilde{\pi}=\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\pi(k)$ sinon. La représentation $\widetilde{\pi}(1)$ de G est isomorphe à $\widetilde{\pi}$, et il existe une ω–représentation Π de $G^\natural$ telle que $\Pi^\circ=\widetilde{\pi}$. Cette représentation est irréductible, et d'après le lemme de Schur, l'endomorphisme $\mathcal{Z}_\Pi$ de Π est la multiplication par une constante $\mu\in\mathbb{C}^\times$. On pose $(\mathcal{Z}^\circ)_\pi=\mu\mathrm{id}_{V_\pi}$. Par construction, on a $(\mathcal{Z}^\circ)_{\pi(k)}=(\mathcal{Z}^\circ)_\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. D'après [**BD**, 1.8], cela définit un élément $\mathcal{Z}^\circ$ de $\mathfrak{Z}(G)$, qui vérifie $\mathcal{Z}^\circ(1)=\mathcal{Z}^\circ$. L'application

$$\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega)\to\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1},\ \mathcal{Z}\mapsto\mathcal{Z}^\circ$$

ainsi définie est un morphisme d'anneaux, et pour $z\in\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}$ et $\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega)$, on a bien

$$\iota(z)^\circ=z,\quad \iota(\mathcal{Z}^\circ)=\mathcal{Z}.$$

En composant l'isomorphisme $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega)\to\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}$, $\mathcal{Z}\mapsto\mathcal{Z}^\circ$ avec l'isomorphisme

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}\to\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]^\mathbb{Z},\ z\mapsto f_z,$$

on obtient un isomorphisme d'anneaux

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega)\to\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]^{\mathbb{Z}},\ \mathcal{Z}\mapsto f_{\mathcal{Z}}.$$

Remarque 2. — La description de l'anneau $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega)$ ci–dessus est valable même si la variété $\Theta_1(\mathfrak{s})$ est vide, et a fortiori même si aucun objet de $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega)$ n'est G–irréductible (on n'a pas supposé que $\mathfrak{s}$ appartient à $\mathfrak{B}_{G^\natural,\omega}(G)$). ■

Remarque 3. — Si l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\Theta(\mathfrak{s})$ se factorise à travers un quotient fini de $\mathbb{Z}$, alors l'ensemble $\Theta(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ des $\mathbb{Z}$–orbites dans $\Theta(\mathfrak{s})$ est un quotient géométrique de $\Theta(\mathfrak{s})$. En particulier c'est une variété algébrique affine, d'algèbre affine $\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}]=\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]^{\mathbb{Z}}$.

En général, cela n'est pas vrai : l'ensemble $\Theta(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ des $\mathbb{Z}$–orbites dans $\Theta(\mathfrak{s})$ n'est pas un quotient géométrique de $\Theta(\mathfrak{s})$. Par exemple si $\boldsymbol{G}=\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, $\theta=\mathrm{id}$ et ω est un caractères non ramifié unitaire de $G=F^\times$ dont les puissances sont denses dans le tore $\mathfrak{P}(F^\times)\simeq\mathbb{C}^\times$, alors les $\mathbb{Z}$–orbites dans $\mathfrak{P}(F^\times)$ ne sont pas fermées, et toute fonction régulière $\mathbb{Z}$–invariante sur $\mathfrak{P}(F^\times)$ est constante. ■

2.19. « Bons » sous–groupes ouverts compacts de G. — Si J est un sous–groupe ouvert compact de G, on note $\mathrm{Irr}_J(G)$ le sous–ensemble de $\mathrm{Irr}(G)$ formé des π tels que $V_\pi^J\neq 0$. D'après [**BD**, 3.7 et 3.9], $\beta_G(\mathrm{Irr}_J(G))$ est un sous–ensemble *fini* de $\mathfrak{B}(G)$. On dit que J est un « bon » sous–groupe ouvert compact de G si

$$\beta_G^{-1}(\beta_G(\mathrm{Irr}_J(G)))=\mathrm{Irr}_J(G),$$

auquel cas on pose $\mathfrak{S}(J)=\beta_G(\mathrm{Irr}_J(G))$. De manière équivalente, J est un bon sous–groupe ouvert compact de G si et seulement si toute représentation π de G admet une décomposition en somme directe

$$\pi=\pi_J\oplus\pi_J^\perp$$

où π_J désigne la sous–représentation de π d'espace $\pi(G)(V^J)$ de V, et $\pi_J^\perp$ la sous–représentation de π d'espace $\pi(G)(\ker\pi(e_J))$. En ce cas, on note $\mathfrak{R}_J(G)$ la sous–catégorie pleine de $\mathfrak{R}(G)$ formée des représentations π telles que $\pi_J=\pi$. Elle est stable par sous–quotient, et coïncide avec $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}(J)}(G)$ [**BD**, 3.9]. De plus (loc. cit.), le foncteur $V\mapsto V^J$ est une équivalence entre $\mathfrak{R}_J(G)$ et la catégorie des $\mathcal{H}_J$–modules (à gauche), de quasi–inverse le foncteur qui a un $\mathcal{H}_J$–module W associe le $\mathcal{H}$–module non dégénéré $(\mathcal{H}*e_J)\otimes_{\mathcal{H}_J}W$.

D'après [**BD**, 2.9], pour qu'un sous–groupe ouvert compact J de G soit bon, il suffit qu'il vérifie les conditions (a) et (b) suivantes — notées (3.7.1) et (3.7.2) dans [**BD**, 3.7] —, pour tout sous–groupe de Levi M de G et tout sous–groupe parabolique P de G de composante de Levi M :

- **(a)** pour tout conjugué J' de J dans G, la classe de conjugaison de $J'_P=(J'\cap P)/(J'\cap U_P)$ dans M ne dépend pas de P ni de J' ; où J'_P est identifié à un sous–groupe de M via l'isomorphisme canonique $M\to P/U_P$.
- **(b)** pour toute représentation (π,V) de G, la projection canonique $V\to V_P=V/V(U_P)$ induit une application surjective $V^J\to(V_P)^{J_P}$; où $V(U_P)$ est le sous–espace de V engendré par les vecteurs $\pi(u)(v)-v$, $u\in U_P$, $v\in V$.

Soit I un sous–groupe d'Iwahori de G, c'est–à–dire le fixateur *connexe* d'une chambre de l'immeuble (affine) étendu de G. Rappelons que I est le groupe des points $\mathfrak{o}$–rationnels d'un $\mathfrak{o}$–schéma en groupes affine lisse connexe $\mathfrak{I}$ de fibre générique $\boldsymbol{G}$. Pour chaque entier $n\geq 1$, on note I^n le n–ième sous–groupe de congruence de I, c'est–à–dire le noyau de la projection canonique (réduction modulo $\mathfrak{p}^n$) $\mathfrak{I}(\mathfrak{o})\to\mathfrak{I}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^n)$. On pose aussi $I^0=I$.

Proposition. — *Pour $n\geq 0$, I^n est un bon sous–groupe ouvert compact de G.*

Démonstration. — Le résultat est connu mais nous n'en avons trouvé aucune démonstration dans la littérature. Puisque G opère transitivement sur les chambres de son immeuble étendu, quitte à remplacer I par l'un de ses conjugués dans G, on peut supposer que la chambre fixée par I est contenue dans l'appartement associé à $A_\circ$. En ce cas I est en « bonne position » par rapport à la paire $(P_\circ, M_\circ)$, c'est–à–dire qu'il vérifie la décomposition triangulaire

$$I = (I \cap \overline{U}_\circ)(I \cap M_\circ)(I \cap U_\circ),$$

où $\overline{U}_\circ$ est le radical unipotent du sous–groupe parabolique de G opposé à $P_\circ$ par rapport à $M_\circ$. D'ailleurs (cf. [**BT**]) cette décomposition est une « décomposition schématique » au sens où il existe des $\mathfrak{o}$–schémas en groupes affines lisses connexes $\mathfrak{M}_\circ$, $\mathfrak{U}_\circ$, $\overline{\mathfrak{U}}_\circ$ de fibres génériques $\boldsymbol{M}_\circ$, $\boldsymbol{U}_\circ$, $\overline{\boldsymbol{U}}_\circ$ et de groupes des points $\mathfrak{o}$–rationnels $I \cap M_\circ$, $I \cap U_\circ$, $I \cap \overline{U}_\circ$ tels que l'application produit $\overline{\mathfrak{U}}_\circ \times_{\mathfrak{o}} \mathfrak{M}_\circ \times_{\mathfrak{o}} \mathfrak{U}_\circ \to \mathfrak{I}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{o}$–schémas. Ici $\boldsymbol{M}_\circ$, $\boldsymbol{U}_\circ$, $\overline{\boldsymbol{U}}_\circ$ désignent les groupes algébriques définis sur F dont $M_\circ$, $U_\circ$, $\overline{U}_\circ$ sont les groupes des points F–rationnels. On en déduit que pour chaque entier $n \geq 1$, I^n est en bonne position par rapport à $(P_\circ, M_\circ)$.

Fixons un entier $n \geq 0$ et posons $J = I^n$. Fixons aussi un sous–groupe de Levi M de G et un sous–groupe parabolique P de G de composante de Levi M. Notons U le radical unipotent de P, et $\overline{U}$ le radical unipotent du sous–groupe parabolique de G opposé à P par rapport à M.

Supposons pour commencer que M contient $M_\circ$. Soit $g \in G$ tel que ${}^gP = gPg^{-1}$ contient $P_\circ$. Rappelons que $A_\circ$ est un tore déployé maximal de G. Puisque $A_\circ$ et ${}^{g^{-1}}A_\circ$ sont contenus dans P, il existe un $p \in P$ tel que ${}^{g^{-1}}A_\circ = {}^pA_\circ$. Alors $x = gp$ appartient à $\mathcal{N}_\circ = N_G(A_\circ)$, et l'on a ${}^gP = {}^xP$. Puisque x stabilise l'appartement de l'immeuble étendu de G associé à $A_\circ$, la chambre fixée par ${}^xI$ est encore dans cet appartement, par conséquent ${}^xJ$ est en bonne position par rapport à $(P_\circ, M_\circ)$, donc aussi par rapport à $(P', M_{P'})$ pour tout $P' \in \mathcal{P}(G)$. Puisque $P' = {}^xP \in \mathcal{P}(G)$ et ${}^xM \supset {}^xM_\circ = M_\circ$, on a $M_{P'} = {}^xM$, d'où

$${}^xJ = ({}^xJ \cap {}^x\overline{U})({}^xJ \cap {}^xM)({}^xJ \cap {}^xU).$$

En conjuguant par x^{-1}, on obient la décomposition triangulaire

$$J = (J \cap \overline{U})(J \cap M)(J \cap U). \tag{$*$}$$

D'après [**BD**, 3.5.2], la propriété $(*)$ implique la condition **(b)** pour la paire (P, M). Quant à la condition $(\boldsymbol{a})$, soit $J' = {}^{g'}J$ pour un $g' \in G$. Puisque $P_\circ \subset {}^xP$ pour un $x \in \mathcal{N}_\circ$, la décomposition d'Iwasawa $G = P_\circ \mathcal{N}_\circ I$ implique la décomposition $G = P\mathcal{N}_\circ I$. Comme par ailleurs I normalise J, on peut supposer que $g' = py$ pour un $p \in P$ et un $y \in \mathcal{N}_\circ$. Ainsi $J' \cap P = {}^p({}^yJ \cap P)$ et J'_P est conjugué dans M à $({}^yJ)_P$. Or le groupe ${}^yJ$ est en bonne position par rapport à $(P_\circ, M_\circ)$, par conséquent lui aussi vérifie $(*)$. En particulier on a la décomposition

$${}^yJ \cap P = ({}^yJ \cap M)({}^yJ \cap U),$$

laquelle implique l'égalité $({}^yJ)_P = {}^yJ \cap M$. Par récurrence sur la longueur des éléments de $W_G = \mathcal{N}_\circ / M_\circ$, on en déduit comme dans la démonstration du lemme 1.3.2 de [**L1**] qu'il existe un élément $y_M \in N_M(A_\circ)$ tel que ${}^yJ \cap M = {}^{y_M}(J \cap M)$. Cela prouve que la condition (**a**) est vérifiée.

Passons au cas général : on ne suppose plus que M contient $M_\circ$. On procède alors exactement comme dans les démonstrations des lemmes 1.3.2 et 1.3.3 de [**L1**]. □

Remarque. — On suppose toujours que le groupe I est en bonne position par rapport à $(P_\circ, M_\circ)$. Le groupe $\theta(I)$ est un autre sous–groupe d'Iwahori de G, et puisque δ_1 appartient à $M_\circ^\natural$, il est lui aussi en bonne position par rapport à $(P_\circ, M_\circ)$: on a la décomposition triangulaire

$$\theta(I) = (\theta(I) \cap \overline{U}_\circ)(\theta(I) \cap M_\circ)(\theta(I) \cap U_\circ).$$

Par suite il existe un élement $m_1 \in M_1$ tel que $\theta(I) = m_1^{-1} I m_1$. Quitte à remplacer δ_1 par $m_1 \cdot \delta_1 \in M_\circ^\natural$, on peut supposer $\theta(I) = I$. Alors $\theta(I^n) = I^n$ pour chaque entier $n \geq 0$. ■

D'après la remarque, on peut supposer vérifiée l'htpothèse suivante.

Hypothèse. — *On suppose de plus que le point–base $\delta_1 \in M_\circ^\natural$ est choisi de telle manière que le F–automorphisme $\theta = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta_1)$ de $\boldsymbol{G}$ stabilise un sous–groupe d'Iwahori de G en bonne position par rapport à $(P_\circ, M_\circ)$.*

D'après la proposition et la remarque ci–dessus, il existe une base de voisinages de 1 dans G formée de sous–groupes ouverts compacts qui sont tous bons, θ–stables et en bonne position par rapport à $(P_\circ, M_\circ)$. Cette propriété sera très utile pour la suite.

2.20. « Bons » sous–espaces tordus ouverts compacts de $G^\natural$. — Un sous–espace tordu ouvert compact $J^\natural$ de $G^\natural$ est dit « bon » si le sous–groupe ouvert compact de G sous–jacent à $J^\natural$ est bon. D'après 2.19, il existe des bons sous–espaces tordus ouverts compacts de $G^\natural$ aussi petits que l'on veut.

Soit $J^\natural = J \cdot \delta$ un bon sous–espace ouvert compact de $G^\natural$ tel que $\omega|_J = 1$. Si Π est une ω–représentation de $G^\natural$, puisque

$$V^J = \pi(e_J)(V) = \Pi(e_{J^\natural})(V) = \Pi(\delta)(V^J),$$

la décomposition de V en $V = V_J \oplus V_J^\perp$ (cf. 2.19) est $G^\natural$–stable : pour $g \in G$ et $v \in V$, on a

$$\Pi(g \cdot \delta) \circ \pi(e_J)(v) = \pi(g) \circ \Pi(\delta) \circ \pi(e_J)(v) = \pi(g) \circ \Pi(e_{J^\natural})(v).$$

En d'autres termes, Π se décompose en

$$\Pi = \Pi_J \oplus \Pi_J^\perp,$$

où Π^J est la restriction de Π sur V_J et $\Pi_J^\perp$ la restriction de Π sur $V_J^\perp$. On note $\mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega)$ la sous–catégorie pleine de $\mathfrak{R}(G, \omega)$ formé des ω–représentations Π telles que $\Pi_J = \Pi$. Puisque le foncteur d'oubli $\Pi \mapsto \Pi^\circ$ envoie $\mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega)$ dans $\mathfrak{R}_J(G)$, la catégorie $\mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega)$ est stable par sous–quotients.

Posons $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(J)$. C'est une partie (finie) $\mathbb{Z}$–stable de $\mathfrak{B}(G)$, et la catégorie $\mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega)$ coïncide avec $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G^\natural, \omega)$. De plus, le foncteur $V \mapsto V^J$ est une équivalence entre $\mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega)$ et la catégorie des $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$–modules non dégénérés. En effet, pour un $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$–module non dégénéré W, l'espace $V = (\mathcal{H} * e_J) \otimes_{\mathcal{H}_J} W$ est un $\mathcal{H}$-module non dégénéré, tel que $V^J = W$ et $V_J = V$. Il définit donc une représentation de G, disons π. Pour $g \in G$ et $v \in V$ de la forme $v = (f * e_J) \otimes w$, où $f \in \mathcal{H}$ et $w \in W$, on pose

$$\Pi(g \cdot \delta)(v) = \pi(g) \circ \Pi(\delta)(v), \quad \Pi(\delta)(v) = ({}^\tau(\omega^{-1} f) * e_J) \otimes w;$$

où l'on a posé ${}^\tau f' = f' \circ \tau^{-1}$, $\tau = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta)$. Notant ${}_g f$ la fonction $x \mapsto f(g^{-1}x)$, on a

$$\begin{aligned} \Pi(\delta) \circ \pi(g)(v) &= \Pi(\delta)({}_g f * e_J \otimes w) \\ &= {}^\tau(\omega^{-1}{}_g f) * e_J \otimes w \\ &= \omega^{-1}(g)\pi(\tau(g)) \circ \Pi(\delta)(v) = \omega^{-1}(g)\Pi(\delta \cdot g)(v). \end{aligned}$$

On obtient ainsi une ω–représentation (Π, V) de $G^\natural$, telle que $\Pi^\circ = \pi$. Puisque le foncteur d'oubli $\Pi \mapsto \Pi^\circ$ est fidèle, cela définit un quasi–inverse du foncteur $V \mapsto V^J$ entre $\mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega)$ et la catégorie des $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$–modules non dégénérés.

Notation. — Soit $\boldsymbol{J}(G^\natural,\omega)$ l'ensemble des bons sous–espaces ouverts compacts $J^\natural$ de $G^\natural$ tels que ω est trivial sur J, et soit $\boldsymbol{J}_{G^\natural,\omega}(G)$ l'ensemble des sous–groupes ouverts compacts J de G tels que J est le groupe sous–jacent à un élément $J^\natural$ de $\boldsymbol{J}(G^\natural,\omega)$.

D'après 2.19, si I est un sous–groupe d'Iwahori de $G^\natural$ normalisé par δ_1, notant n_0 le plus petit entier ≥ 0 tel que $\omega|_{I^{n_0}}=1$, on a l'inclusion

$$\{I^n : n\geq n_0\}\subset \boldsymbol{J}_{G^\natural,\omega}(G).$$

En particulier, $\boldsymbol{J}_{G^\natural,\omega}(G)$ est une base de voisinages de 1 dans G.

2.21. $(H^\natural,\omega,B)$**–modules admissibles.** — La représentation $i_P^G(\rho_{B_P})$ de G introduite en 2.16 est un (G,B_P)*–module admissible* au sens de **[BD]**, c'est–à–dire un B_P-module V muni d'une représentation $\pi : G\rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ telle que l'action de G sur V commute à celle de B_P, vérifiant la condition d'admissibilité : pour tout sous-groupe ouvert compact J de G, le B_P-module V^J est projectif et de type fini. Plus généralement, on a :

Définition. — Soit $H^\natural$ un espace topologique tordu de groupe sous-jacent H localement profini, et soit $\mathfrak{X}$ une variété algébrique affine sur $\mathbb{C}$ d'algèbre affine $B=\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$. On appelle $(H^\natural,\omega,B)$*–module admissible* la donnée d'un B-module V et d'une ω–représentation de $H^\natural$ d'espace V telle que l'action de $H^\natural$ sur V commute à celle de B, vérifiant la condition d'admissibilité : pour tout sous-groupe ouvert compact J de H, le B–module V^J est projectif de type fini — i.e. le (H,B)–module sous–jacent est admissible.

Remarque. — Si $H^\natural$ vérifie la propriété (P_1) de **[L2**, 8.3], c'est–à–dire s'il existe une famille de sous–espaces tordus ouverts compacts de $H^\natural$ telle que les sous–groupes de H sous–jacents aux éléments de cette famille forment une base de voisinage de 1 dans H, alors la condition d'admissibilité est équivalente à : pour tout sous–espace tordu ouvert compact $J^\natural$ de $H^\natural$, le B–module $V^{J^\natural}$ est projectif de type fini. ■

Soit V un $(H^\natural,\omega,B)$–module admissible, où B est l'algèbre affine d'une variété algébrique affine $\mathfrak{X}$ sur $\mathbb{C}$ et $H^\natural$ opère sur V via une ω–représentation Π. Tout morphisme de variétés algébriques $u:\mathfrak{X}'\rightarrow\mathfrak{X}$ définit comme suit un $(H^\natural,\omega,B')$–module admissible $V_u=V\otimes_{B,\tilde{u}}B'$, où $B'=\mathbb{C}[\mathfrak{X}']$ et $\tilde{u}:B'\rightarrow B$ est le morphisme d'algèbres correspondant à u. En particulier pour tout point $x\in\mathfrak{X}$, vu comme un morphisme $x:\mathrm{Spec}(\mathbb{C})\rightarrow\mathfrak{X}$, le localisé $V_x=V\otimes_{B,\tilde{x}}\mathbb{C}$ de V en x est une ω–représentation de $H^\natural$, notée Π_x, et la représentation sous–jacente Π_x° de H est admissible et de longueur finie.

Soit $P\in\mathcal{P}(G^\natural)$, et soit Σ une ω–représentation de $M_P^\natural$ telle que la représentation sous–jacente Σ° de M_P est admissible. Rappelons que $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural)$ est un groupe algébrique affine, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (cf. la remarque 2 de 2.11). Notons $B=B_{P^\natural}$ l'algèbre affine $\mathbb{C}[\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural)]$, et $\varphi_{P^\natural}: M_P^\natural\rightarrow B$ le « caractère universel » donné par l'évaluation :

$$\varphi_{P^\natural}(\delta)(\Xi)=\Xi(\delta),\quad \delta\in M_P^\natural,\ \Xi\in\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural).$$

On définit comme en 2.16 une ω–représentation $\Sigma_B=\Sigma\otimes\varphi_{P^\natural}$ de $M_P^\natural$: l'espace de Σ_B est $W=V_\Sigma\otimes_{\mathbb{C}}B$, et pour $\delta\in M_P^\natural$, $v\in W$ et $b\in B$, on pose

$$\Sigma_B(\delta)(v\otimes b)=\Sigma(\delta)(v)\otimes\varphi_{P^\natural}(\delta)b.$$

Posons

$$(\Pi,V)={}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma_B,W).$$

C'est une ω–représentation de G. L'anneau B opère naturellement sur l'espace V, ce qui le munit d'une structure de $(G^\natural,\omega,B)$–module admissible. Pour $\Xi\in\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural)$ correspondant à $u : B \to \mathbb{C}$, la ω–représentation Π_Ξ de $G^\natural$ sur le localisé $V_\Xi = V \otimes_{B,u} \mathbb{C}$ est isomorphe à ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \cdot \Sigma)$.

Soit une fonction $\phi \in \mathcal{H}^\natural$. Rappelons qu'on a noté Φ_ϕ l'élément de $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ défini par

$$\Phi_\phi(\Pi') = \Theta_{\Pi'}(\phi), \quad \Pi' \in \mathrm{Irr}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega).$$

Soit $J^\natural$ un sous–espace tordu ouvert compact de $G^\natural$, de groupe sous–jacent J, tel que $\omega|_J = 1$ et $\phi \in \mathcal{H}^\natural_J$. L'opérateur $\Pi(\phi)$ est un B–endomorphisme du sous–espace $V^J = V^{J^\natural}$ de V formé des vecteurs fixés par J. Puisque V^J est un B–module projectif de type fini, on dispose d'une application trace $\mathrm{tr}_B : \mathrm{End}_B(V^J) \to B$. On pose

$$b = \mathrm{tr}_B(\Pi(\phi)) \in B.$$

Pour $\Xi \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$ correspondant à $u : B \to \mathbb{C}$, l'endomorphisme $\Pi(\phi) \otimes_{B,u} \mathbb{C}$ de

$$(V \otimes_{B,u} \mathbb{C})^J = V^J \otimes_{B,u} \mathbb{C}$$

est isomorphe à ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \cdot \Sigma)(\phi)$, par conséquent

$$b(\Xi) = \Phi_\phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \cdot \Sigma)).$$

En d'autres termes, l'application $\Xi \mapsto \Phi_\phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \cdot \Sigma))$ est une fonction régulière sur la variété $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$.

3. Énoncé du résultat

3.1. Le théorème principal. — Soit $\mathcal{F}(G^\natural, \omega)$ le sous–espace de $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ formé des formes linéaires Φ qui vérifient les conditions (i) et (ii) suivantes :

(i) Il existe un ensemble fini $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}_{G^\natural,\omega}(G)$ tel que $\Phi(\Pi) = 0$ pour tout $\Pi \in \mathrm{Irr}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$ tel que $\beta_{G^\natural}(\Pi) \notin \mathfrak{S}$.

(ii) Pour $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ et $\Sigma \in \mathrm{Irr}_\mathbb{C}(M_P^\natural, \omega)$, l'application $\Xi \mapsto \Phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\Sigma))$ est une fonction régulière sur la variété $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$.

Remarque 1. — D'après [**BD**, 3.7 et 3.9], la condition (i) est équivalente à la condition (i') suivante : *il existe un sous–groupe ouvert compact J de G tel que* $\Phi(\Pi) = 0$ *pour tout* $\Pi \in \mathrm{Irr}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$ *tel que* $V_\Pi^J = 0$. D'ailleurs d'après 2.8 cette condition (i') est équivalente à la condition (i") suivante : *il existe un sous–espace tordu ouvert compact $J^\natural$ de $G^\natural$ tel que* $\Phi(\Pi) = 0$ *pour tout* $\Pi \in \mathrm{Irr}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$ *tel que* $V_\Pi^{J^\natural} = 0$. D'autre part dans la condition (ii), on peut bien sûr remplacer le groupe algébrique affine $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$ par sa composante neutre $\mathfrak{P}^0_\mathbb{C}(M_P^\natural)$. ■

Soit aussi $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural, \omega)$ le sous–espace de $\mathcal{F}(G^\natural, \omega)$ formé des Φ de la forme Φ_ϕ pour une fonction $\phi \in \mathcal{H}^\natural$.

Soit enfin $[\mathcal{H}^\natural, \mathcal{H}]_\omega$ le sous–espace vectoriel de $\mathcal{H}^\natural$ engendré par les fonctions de la forme $\phi * f - \omega f * \phi$ pour $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ et $f \in \mathcal{H}$. On note $\overline{\mathcal{H}}^\natural_\omega = \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$ l'espace quotient $\mathcal{H}^\natural / [\mathcal{H}^\natural, \mathcal{H}]_\omega$. En d'autres termes, $\overline{\mathcal{H}}^\natural_\omega$ est le quotient de l'espace $\mathcal{H}^\natural_\omega = \mathcal{H}(G^\natural, \omega)$ introduit en 2.8 (variante) par le sous–espace $[\mathcal{H}^\natural_\omega, \mathcal{H}]$ engendré par les commutateurs $\phi \cdot f - f \cdot \phi$ pour $\phi \in \mathcal{H}^\natural_\omega$ et $f \in \mathcal{H}$.

Théorème. — *L'application* $\mathcal{H}(G^\natural) \mapsto \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$, $\phi \mapsto \Phi_\phi$ *induit un isomorphisme de* $\mathbb{C}$*–espaces vectoriels*

$$\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) \to \mathcal{F}(G^\natural, \omega).$$

D'après 2.21, on a l'inclusion $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega)\subset\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$. Si Π est une ω–représentation de $G^\natural$, pour $\phi\in\mathcal{H}^\natural$ et $f\in\mathcal{H}$, on a $\Pi(\phi*f)=\Pi(\omega f*\phi)$ et donc $\Pi(\phi*f-\omega f*\Pi)=0$. Ainsi, la transformée de Fourier $\mathcal{H}^\natural\mapsto\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$, $\phi\mapsto\Phi_f$ induit bien une application $\mathbb{C}$–linéaire

$$\overline{\mathcal{H}}(G^\natural,\omega)\to\mathcal{F}(G^\natural,\omega),$$

et il s'agit de prouver qu'elle est surjective (théorème de Paley–Wiener) et injective (théorème de densité spectrale). La suite de l'article et [**HL**] sont consacrés à la démonstration de ces deux résultats. Par récurrence sur la dimension des sous–espaces paraboliques de $G^\natural$, on se ramène dans la section 4 à démontrer un théorème analogue (4.8) sur la partie « discrète » de la théorie. La surjectivité de l'application du théorème de 4.8 est prouvée dans la section 5, tandis que son injectivité est prouvée dans [**HL**].

On peut voir $\mathcal{H}^\natural$ comme un $\mathcal{H}$–module non dégénéré (à gauche). Pour chaque élément z de $\mathfrak{Z}(G)$, on a donc un élément $z_{\mathcal{H}^\natural}\in\mathrm{End}_G(\mathcal{H}^\natural)$. Reprenons le $\mathbb{C}$–isomorphisme $u:\mathcal{H}\to\mathcal{H}^\natural_\omega$ de l'exemple de 2.8 (rappelons que $\mathcal{H}^\natural_\omega=\mathcal{H}^\natural$ comme $\mathcal{H}$–module à gauche). Pour $f,\,h,\,f'\in\mathcal{H}$, il vérifie $u(f*h*f')=f\cdot u(h)\cdot\tau(f')$, où l'on a posé $\tau(f')=\omega f'^\theta$. On a donc

$$u\circ z_{\mathcal{H}}=z_{\mathcal{H}^\natural}\circ u,\quad z\in\mathfrak{Z}(G).$$

En particulier pour $f,\,f'\in\mathcal{H}$ et $\phi\in\mathcal{H}^\natural_\omega$, posant $h=u^{-1}(\phi)$, on a

$$\begin{aligned} z_{\mathcal{H}^\natural}(f\cdot\phi\cdot f') &= z_{\mathcal{H}^\natural}\circ u(f*h*\tau^{-1}(f'))\\ &= u\circ z_{\mathcal{H}}(f*h*\tau^{-1}(f'))\\ &= u(f*z_{\mathcal{H}}(h)*\tau^{-1}(f'))=f\cdot z_{\mathcal{H}^\natural}(\phi)\cdot f'. \end{aligned}$$

L'application $z\mapsto z_{\mathcal{H}^\natural}$ est donc un isomorphisme de $\mathfrak{Z}(G)$ sur $\mathrm{End}_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{H}^\natural_\omega)$. De plus $[\mathcal{H}^\natural_\omega,\mathcal{H}]$ est un sous–espace vectoriel $\mathfrak{Z}(G)$–stable de $\mathcal{H}^\natural_\omega$, i.e. $[\mathcal{H}^\natural,\mathcal{H}]_\omega$ est un sous–espace vectoriel $\mathfrak{Z}(G)$–stable de $\mathcal{H}^\natural$.

L'anneau $\mathfrak{Z}(G)$ opère sur l'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$: pour $z\in\mathfrak{Z}(G)$ et $\Phi\in\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$, on note $z\cdot\Phi$ l'élément de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$ défini par

$$(z\cdot\Phi)(\Pi)=f_z(\theta_{G^\natural}(\Pi))\Phi(\Pi),\quad \Pi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega).$$

Lemme. — *La transformée de Fourier $\mathcal{H}(G^\natural)\mapsto\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$, $\phi\mapsto\Phi_\phi$ est un morphisme de $\mathfrak{Z}(G)$–modules.*

Démonstration. — D'après [**BD**, 1.5], le centre $\mathfrak{Z}(G)$ de $\mathfrak{R}(G)$ est la limite projective des centres $Z(e*\mathcal{H}*e)$ où e parcourt les idempotents de $\mathcal{H}$, pour les morphismes de transitions

$$Z(e'*\mathcal{H}*e')\to Z(e*\mathcal{H}*e),\ h\mapsto h*e\quad \text{si } e*\mathcal{H}*e\subset e'*\mathcal{H}*e'.$$

En d'autres termes, tout élément z de $\mathfrak{Z}(G)$ est la donnée, pour chaque idempotent e de $\mathcal{H}$, d'un élément $z(e)\in Z(e*\mathcal{H}*e)$, avec la relation $z(e)=z(e')*e$ si $e=e*e'$. L'action de $\mathfrak{Z}(G)$ sur le $\mathcal{H}$–module (à gauche) $\mathcal{H}$ est donnée par (pour $z\in\mathfrak{Z}(G)$ et $f\in\mathcal{H}$) :

$$z\cdot f=z(e)*f\quad \text{si } e*f=f$$

De même l'action de $\mathfrak{Z}(G)$ sur $\mathcal{H}^\natural$ est donnée par (pour $z\in\mathfrak{Z}(G)$ et $\phi\in\mathcal{H}^\natural$) :

$$z\cdot\phi=z(e)*\phi\quad \text{si } e*\phi=\phi.$$

Si Π est une ω–représentation de $G^\natural$, pour $z\in\mathfrak{Z}(G)$ et $\phi\in\mathcal{H}^\natural$, on a

$$\Pi(z\cdot\phi)=\Pi(z(e)*\phi)=\Pi^\circ(z(e))\circ\Pi(\phi)=z_{\Pi^\circ}\circ\Pi(\phi),$$

où $\Pi^\circ(z(e))$ est l'opérateur $\int_G z(e)(g)\Pi^\circ(g)dg$ sur l'espace de Π. Si de plus Π est G–irréductible, on a $z_{\Pi^\circ}=f_z(\theta_G(\Pi^\circ))\mathrm{id}_{V_\Pi}$. D'où le lemme. $\square$

Remarque 2. — Le lemme ci–dessus ne dépend pas du théorème. Joint au théorème, il implique en particulier que le sous–espace $\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$ de $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural,\omega)^*$ est $\mathfrak{Z}(G)$–stable. ■

3.2. Variante « tempérée » du théorème. — Pour $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$, $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural,|\omega|)$ est un espace principal homogène sous $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$, donc en particulier une variété algébrique affine complexe. Comme dans le cas non tordu, on peut remplacer la condition (ii) du théorème de 3.1 par la condition (ii') suivante : *pour* $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ *et* $\Sigma\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C},\mathrm{t}}(M_P^\natural,\omega_\mathrm{u})$*, l'application* $\Xi\mapsto\Phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\Sigma))$ *est une fonction régulière sur la variété* $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural,|\omega|)$. Cette affirmation résulte du lemme suivant.

Lemme. — *Soit* $\Phi\in\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$ *tel que pour tout* $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ *et tout* $\Sigma\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C},\mathrm{t}}(M_P^\natural,\omega_\mathrm{u})$*, l'application* $\Xi\mapsto\Phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\Sigma))$ *est une fonction régulière sur la variété* $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural,|\omega|)$*. Alors pour tout* $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ *et tout* $\Sigma\in\mathrm{Irr}_\mathbb{C}(M_P^\natural,\omega)$*, l'application* $\Xi\mapsto\Phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\Sigma))$ *est une fonction régulière sur la variété* $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$.

Démonstration. — D'après le lemme 1 de 2.13, il suffit de montrer que pour tout $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ et tout triplet de Langlands μ' pour $(M_P^\natural,\omega)$, notant $\widetilde{\Sigma}_{\mu'}$ la ω–représentation de $M_P^\natural$ associée à μ' et $\widetilde{\Sigma}_{\mathbb{C},\mu'}$ son image dans $\mathcal{G}_\mathbb{C}(M_P^\natural,\omega)$, l'application $\Xi\mapsto\Phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\widetilde{\Sigma}_{\mathbb{C},\mu'}))$ est une fonction régulière sur la variété $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$. Le triplet μ' s'écrit $\mu'=(Q^\natural\cap M_P^\natural,\Sigma',\Xi')$ où $Q^\natural$ est un élément de $\mathcal{P}(G^\natural)$ tel que $Q^\natural\subset P^\natural$, Σ' est une ω_u–représentation M_Q–irréductible tempérée de $M_Q^\natural$, et Ξ' est un élément de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_Q^\natural,|\omega|)$ tel que Ξ'° est positif par rapport à $U_Q\cap M_P$. On a (par définition) $\widetilde{\Sigma}_{\mu'}={}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural}(\Xi'\cdot\Sigma')$ et

$$ {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\cdot\widetilde{\Sigma}_{\mu'})={}^\omega i_{Q^\natural}^{G^\natural}(\Xi|_{M_Q^\natural}\Xi'\cdot\Sigma'),\quad \Xi\in\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural). $$

D'où le résultat, puisque l'application

$$ \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)\rightarrow\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_Q^\natural,|\omega|),\ \Xi\mapsto\Xi|_{M_Q^\natural}\Xi' $$

est un morphisme algébrique. □

Remarque. — Supposons le caractère ω *unitaire* (i.e. $|\omega|=1$). Pour $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$, notons $\mathfrak{P}_{\mathbb{C},\mathrm{u}}^0(M_P^\natural)$ le sous–groupe de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}^0(M_P^\natural)$ formé des éléments unitaires. Rappelons que $\mathfrak{P}_\mathbb{C}^0(M_P^\natural)$ est un sous–ensemble de $\mathrm{Irr}_\mathbb{C}(M_P^\natural)=\mathrm{Irr}_\mathbb{C}(M_P^\natural,\xi=1)$, et qu'une représentation de $M_P^\natural$ est dite unitaire si son espace est muni d'un produit scalaire hermitien $M_P^\natural$–invariant (cf. 2.12). Alors on peut, comme le fait Waldspurger [**W**, 6.1], remplacer la condition (ii) du théorème de 3.1 par la condition (ii") suivante : *pour* $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ *et* $\Sigma\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C},\mathrm{t}}(M_P^\natural,\omega)$*, l'application* $\Xi\mapsto\Phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\Sigma))$ *est une « fonction de Paley–Wiener » sur* $\mathfrak{P}_{\mathbb{C},\mathrm{u}}^0(M_P^\natural)$. Pour la notion de fonction de Paley–Wiener, on renvoie à [**W**, 2.6] et 4.3. ■

3.3. Variante « finie » du théorème. — Pour un sous–espace tordu ouvert compact $K^\natural=K\cdot\delta$ de G tel que ω est trivial sur K, on note $[\mathcal{H}_K^\natural,\mathcal{H}_K]_\omega$ le sous–espace vectoriel de $\mathcal{H}_K^\natural=\mathcal{H}_K(G^\natural)$ engendré par les fonctions de la forme $\phi*f-\omega f*\phi$ pour $\phi\in\mathcal{H}_K^\natural$ et $f\in\mathcal{H}_K$, et l'on note $\overline{\mathcal{H}}_{K,\omega}^\natural=\overline{\mathcal{H}}_K(G^\natural,\omega)$ l'espace quotient $\mathcal{H}_K^\natural/[\mathcal{H}_K^\natural,\mathcal{H}_K]_\omega$. En d'autres termes, notant $\mathcal{H}_{K,\omega}^\natural=\mathcal{H}_K(G^\natural,\omega)$ le $\mathcal{H}_K$–bimodule défini comme en 2.8 (variante) en remplaçant la paire $(\mathcal{H}^\natural,\mathcal{H})$ par la paire $(\mathcal{H}_K^\natural,\mathcal{H}_K)$, l'espace $\overline{\mathcal{H}}_{K,\omega}^\natural$ est le quotient de $\mathcal{H}_{K,\omega}^\natural$ par le sous–espace $[\mathcal{H}_{K,\omega}^\natural,\mathcal{H}_K]$ engendré par les commutateurs $\phi\cdot f-f\cdot\phi$ pour $\phi\in\mathcal{H}_{K,\omega}^\natural$ et $f\in\mathcal{H}_K$.

D'autre part on note $\mathcal{F}_K(G^\natural,\omega)$ le sous–espace vectoriel de $\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$ formé des éléments Φ telles que $\Phi(\Pi)=0$ pour tout $\Pi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ tel que $\Pi^K=0$, où Π^K désigne la classe d'isomorphisme du $(\mathcal{H}_K^\natural,\omega)$–module $\mathcal{H}_K$–simple associé à Π (cf. 2.8).

Rappelons que $\boldsymbol{J}_{G^\natural,\omega}(G)$ est l'ensemble des sous–groupes ouverts compacts J de G tels que J est « bon » et normalisé par un élément de $G^\natural$, et $\omega|_J=1$

Théorème. — *Pour tout $J\in\boldsymbol{J}_{G^\natural,\omega}(G)$, l'application $\mathcal{H}(G^\natural,J)\rightarrow\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$, $\phi\mapsto\Phi_\phi$ induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$–espaces vectoriels*

$$\overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural,\omega)\rightarrow\mathcal{F}_J(G^\natural,\omega).$$

D'après la remarque 1 de 3.1, l'espace $\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$ est la limite inductive des sous–espaces $\mathcal{F}_J(G^\natural,\omega)$ pour $J\in\boldsymbol{J}_{G^\natural,\omega}(G)$. D'autre part, pour J, $J'\in\boldsymbol{J}_{G^\natural,\omega}(G)$ tels que $J'\subset J$, on verra en [**HL**] que l'inclusion $\mathcal{H}_J(G^\natural,\omega)\subset\mathcal{H}_{J'}(G^\natural,\omega)$ induit par passage aux quotients une application injective ([**K2**, lemma 3.2] dans le cas non tordu)

$$\overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural,\omega)\subset\overline{\mathcal{H}}_{J'}(G^\natural,\omega).$$

En d'autres termes, on a l'égalité

$$(*)\qquad [\mathcal{H}^\natural_{J',\omega},\mathcal{H}_{J'}]\cap\mathcal{H}_J^\natural=[\mathcal{H}^\natural_{J,\omega},\mathcal{H}_J].$$

D'ailleurs cette égalité est contenue dans le théorème ci–dessus. Par conséquent si le théorème ci–dessus est vrai, l'espace $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural,\omega)$ est la limite inductive des sous–espaces $\overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural,\omega)$ pour $J\in\boldsymbol{J}_{G^\natural,\omega}(G^\natural)$, et par passage aux limites inductives on en déduit théorème de 3.1.

Remarque. — Nous n'en aurons pas besoin par la suite, mais signalons quand même que la réciproque est vraie aussi : le théorème de 3.1 implique le théorème ci–dessus. En effet d'après 2.20, pour $J\in\boldsymbol{J}_{G^\natural,\omega}(G)$, on a la décomposition en produit de catégories abéliennes

$$\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)=\mathfrak{R}_J(G^\natural,\omega)\times\mathfrak{R}_J^\perp G^\natural,\omega),$$

où $\mathfrak{R}_J^\perp(G^\natural,\omega)$ est la sous–catégorie pleine de $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$ engendrée par les ω–représentations $\Pi_J^\perp$ de $G^\natural$ pour Π parcourant les objets de $\mathfrak{R}(G^\natural,\omega)$. D'où la décomposition

$$\mathcal{F}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}_J(G^\natural,\omega)\oplus\mathcal{F}_J^\perp(G^\natural,\omega),$$

où $\mathcal{F}_J^\perp(G^\natural,\omega)$ est le sous–espace vectoriel de $\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$ formé des éléments Φ tels que $\Phi(\Pi)=0$ pour tout $\Pi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ tel que $\Pi^J\neq 0$. On verra en [**HL**] que l'espace vectoriel $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural,\omega)$ admet lui aussi une décomposition

$$\overline{\mathcal{H}}(G^\natural,\omega)=\overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural,\omega)\oplus\overline{\mathcal{H}}_J^\perp(G^\natural,\omega)$$

qui, par définition, vérifie $\Theta_\Pi|_{\overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural,\omega)}=0$ pour tout $\Pi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ tel que $\Pi^J\neq 0$. On en déduit que si le théorème de 3.1 est vrai alors le théorème ci–dessus l'est aussi. ■

4. Réduction à la partie « discrète » de la théorie

4.1. Le « lemme géométrique ». — Rappelons que l'on a posé $W_G=N_G(A_\circ)/M_\circ$. Pour chaque $w\in W_G$, on fixe un représentant n_w de w dans $N_G(A_\circ)$. De la même manière, pour $P\in\mathcal{P}(G)$, on pose

$$W_{M_P}=N_{M_P}(A_\circ)/M_\circ\subset W_G.$$

Pour P, $Q\in\mathcal{P}(G)$, on pose

$$W_G(P,Q)=\{w\in W_G:w(M_P)=M_Q\}$$

et

$$W_G^{P,Q} = \{w \in W_G : w(M_P \cap P_\circ) \subset P_\circ,\ w^{-1}(M_Q \cap P_\circ) \subset P_\circ\};$$

où, pour toute partie X de G normalisée par $M_\circ$, on a posé $w(X) = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(n_w)(X)$. D'après [**BZ**, 2.11], $W_G^{P,Q}$ est un système de représentants des doubles classes $W_{M_Q}\backslash W_G/W_{M_P}$ dans W_G. Notons que $W_G(P,Q) \cap W_G^{P,Q}$ est un système de représentants des classes de

$$W_{M_Q}\backslash W_G(P,Q) = W_G(P,Q)/W_{M_P}.$$

Pour $w \in W_G^{P,Q}$, on pose

$$M_{P,\bar{w}} = M_P \cap w^{-1}(M_Q), \quad M_{Q,w} = w(M_{P,\bar{w}}) = w(M_P) \cap M_Q.$$

Ces groupes sont les composantes de Levi standard des sous–groupes paraboliques standard $P_{\bar{w}}$ et Q_w de G définis par

$$P_{\bar{w}} = M_{P,\bar{w}}U_\circ, \quad Q_w = M_{Q,w}U_\circ.$$

Pour $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, le F–automorphisme $\theta = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta_1)$ de $\boldsymbol{G}^\natural$ opère sur W_{M_P}. On pose

$$W_{M_P^\natural} = \{w \in W_{M_P} : \theta(w) = w\}.$$

C'est un sous–groupe de W_{M_P} qui ne dépend pas du choix de $\delta_1 \in M_\circ^\natural$. D'autre part, pour $P^\natural$, $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, θ opère sur $W_G(P,Q)$ et sur $W_G^{P,Q}$, et l'on pose

$$W_{G^\natural}(P,Q) = \{w \in W_G(P,Q) : \theta(w) = w\}, \quad W_{G^\natural}^{P,Q} = \{w \in W_G^{P,Q} : \theta(w) = w\}.$$

On a donc

$$W_{G^\natural}(P,Q) = W_{G^\natural} \cap W_G(P,Q), \quad W_{G^\natural}^{P,Q} = W_{G^\natural} \cap W_G^{P,Q},$$

et tout comme $W_{G^\natural}$, ces groupes ne dépendent pas du choix de $\delta_1 \in M_\circ^\natural$. De plus, $W_{G^\natural}^{P,Q}$ s'identifie au sous–ensemble $[W_{M_Q}\backslash W_G/W_{M_P}]^\theta$ de $W_{M_Q}\backslash W_G/W_{M_P}$ formé des doubles classes qui sont stabilisées par θ. Pour $w \in W_{G^\natural}^{P,Q}$, les groupes $P_{\bar{w}}$ et Q_w sont θ–stables, donc définissent des sous–espaces paraboliques standard $P_{\bar{w}} \cdot \delta_1$ et $Q_w \cdot \delta_1$ de $G^\natural$, notés $P_{\bar{w}}^\natural$ et $Q_w^\natural$. Leurs composantes de Levi standard, $M_{P,\bar{w}}^\natural = M_{P,\bar{w}} \cdot \delta_1$ et $M_{Q,w}^\natural = M_{Q,w} \cdot \delta_1$, vérifient

$$w(M_{P,\bar{w}}^\natural) = M_{Q,w}^\natural;$$

où, pour toute partie Y de $G^\natural$ normalisée par $M_\circ$, on a posé $w(Y) = n_w \cdot Y \cdot n_w^{-1}$. Soit

$$\boldsymbol{f}(w) = {}^\omega\boldsymbol{f}_{P^\natural}^{Q^\natural}(w) : \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_Q^\natural, \omega)$$

le foncteur défini par

$$\boldsymbol{f}(w) = {}^\omega i_{Q_w^\natural}^{Q^\natural} \circ (\Sigma \rightarrow {}^{n_w}\Sigma) \circ {}^\omega r_{P^\natural}^{P_{\bar{w}}^\natural};$$

où ${}^{n_w}\Sigma(\delta) = \Sigma(n_w^{-1} \cdot \delta \cdot n_w)$, $\delta \in M_{P,\bar{w}}^\natural$. Il induit un morphisme $\mathbb{C}$–linéaire

$$\boldsymbol{f}_{\mathbb{C}}(w) = {}^\omega\boldsymbol{f}_{P^\natural,\mathbb{C}}^{Q^\natural}(w) : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural, \omega)$$

qui ne dépend pas du choix du représentant n_w de w dans $N_G(A_\circ)$.

Soit aussi

$$\boldsymbol{h} = {}^\omega\boldsymbol{h}_{P^\natural}^{Q^\natural} : \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_Q^\natural, \omega)$$

le foncteur défini par

$$\boldsymbol{h} = {}^\omega r_{G^\natural}^{Q^\natural} \circ {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}.$$

Il induit un morphisme $\mathbb{C}$–linéaire

$$\boldsymbol{h}_{\mathbb{C}} = {}^\omega\boldsymbol{h}_{P^\natural,\mathbb{C}}^{Q^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural, \omega).$$

Proposition. — *Pour $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega)$, on a l'égalité dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural, \omega)$*

$$\boldsymbol{h}_{\mathbb{C}}(\Sigma) = \sum_w \boldsymbol{f}_{\mathbb{C}}(w)(\Sigma),$$

où w parcourt les éléments de $W_{G^\natural}^{P,Q}$.

Démonstration. — Dans le cas non tordu — i.e. pour $\theta = \mathrm{id}$ et $\omega = 1$ —, on sait d'après [**BZ**, 2.12] qu'il existe une filtration $0 = h_0 \subset h_1 \subset \cdots \subset h_k = h$ du foncteur

$$h = r_G^Q \circ i_P^G : \mathfrak{R}(M_P) \to \mathfrak{R}(M_Q)$$

telle que pour $i = 1, \ldots, k$, le foncteur quotient $h_i/h_{i-1} : \mathfrak{R}(M_P) \to \mathfrak{R}(M_Q)$ est isomorphe à

$$f(w_i) = i_{Q_{w_i}}^Q \circ (\sigma \to {}^{n_{w_i}}\sigma) \circ r_P^{P_{\bar{w}_i}}$$

pour un $w_i \in W_G^{P,Q}$. Les w_i sont deux–à–deux distincts, et $W_G^{P,Q} = \{w_i : i = 1, \ldots, k\}$. Précisément, soit $w_1, \ldots, w_k$ les éléments de $W_G^{P,Q}$ ordonnés de telle manière que pour $i = 1, \ldots, k-1$, on ait

$$l(w_i) \geq l(w_{i+1}),$$

où $l : W_G \to \mathbb{Z}_{>0}$ désigne la fonction longueur. Alors pour $i = 1, \ldots, k$,

$$X_i = \textstyle\coprod_{j=1}^i P n_{w_j} Q$$

est ouvert dans G (et Q–invariant à droite). Rappelons que pour une représentation σ de M_P, la représentation $\pi = i_P^G(\sigma)$ de G opère par translations à droite sur l'espace des fonctions $\varphi : G \to V_\sigma$ vérifiant :

- $\varphi(mug) = \delta_P^{1/2}(m)\sigma(m)\varphi(g)$ pour $m \in M_P$, $u \in U_P$, $g \in G$;
- il existe un sous–groupe ouvert compact K_φ de G tel que $\varphi(gx) = \varphi(g)$ pour $g \in G$, $x \in K_\varphi$.

Ici $\delta_P : M_P \to \mathbb{R}_{>0}$ désigne la fonction module habituelle. Pour $i = 1, \ldots, k$, on note $V_\pi(X_i)$ le sous–espace (Q–stable) de V_π formé des fonctions $\varphi : G \to V_\sigma$ à support dans X_i. Il définit une sous–représentation π_i de $\pi|_Q$, dont on peut prendre la restriction de Jacquet normalisée (d'espace le quotient de $V_\pi(X_i)$ par le sous–espace engendré par les $\pi_i(u)(v) - v$ pour $v \in V_\pi(X_i)$ et $u \in U_Q$) : c'est une représentation de M_Q, que l'on note $h_i(\sigma)$. La filtration $0 = h_0 \subset h_1 \subset \cdots \subset h_k = h$ ainsi définie vérifie $h_i/h_{i-1} \simeq f(w_i)$ [**BZ**, 5.2].

Passons au cas tordu. Notons $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ les θ–orbites dans $W_G^{P,Q}$. Puisque $l \circ \theta = l$, on peut supposer que les éléments de $W_G^{P,Q}$ ont été ordonnés de telle manière que

$$\Omega_j = \{w_{i_{j-1}+1}, w_{i_{j-1}+2}, \ldots, w_{i_j}\}, \quad j = 1, \ldots, s \quad (i_0 = 0,\, i_s = k).$$

Soit Σ une ω–représentation de $G^\natural$, et soit $\Pi = {}^\omega i_{P^\natural}^{Q^\natural}(\Sigma)$. Posons $\sigma = \Sigma^\circ$ et $\pi = \Pi^\circ$. On a $\pi = i_P^G(\sigma)$, et d'après [**L2**, 2.7], l'action de $\Pi(\delta_1)$ sur V_π est donnée par

$$\Pi(\delta_1)(\varphi)(g) = \omega(\theta^{-1}(g))\Sigma(\delta_1)(\varphi(\theta^{-1}(g))), \quad \varphi \in V_\pi,\, g \in G.$$

Pour $j = 1, \ldots, s$, puisque $\theta(X_{i_j}) = X_{i_j}$, le sous–espace $V_j = V_\pi(X_{i_j})$ de V_π est stable sous l'action de $\Pi(\delta_1)$, donc définit une sous–ω–représentation Π_j de $\Pi|_{Q^\natural}$ telle que $\Pi_j^\circ = \pi_{i_j}$. Comme dans le cas non tordu, on peut prendre la restriction de Jacquet normalisée de Π_j (cf. [**L2**, 5.10]) : c'est une ω–représentation de $M_Q^\natural$, que l'on note $\boldsymbol{h}_j(\Sigma)$. On obtient ainsi une filtration $0 = \boldsymbol{h}_0 \subset \boldsymbol{h}_1 \subset \cdots \subset \boldsymbol{h}_s = \boldsymbol{h}$ du foncteur $\boldsymbol{h}$ qui vérifie $\boldsymbol{h}_j^\circ = h_{i_j}$, $j = 1, \ldots, s$. Soit $j \in \{1, \ldots, s\}$. Notons $\overline{\boldsymbol{h}}_j$ le foncteur quotient

$$\boldsymbol{h}_j/\boldsymbol{h}_{j-1} : \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega) \to \mathfrak{R}(M_Q^\natural, \omega).$$

Posons $k_j = i_j - i_{j-1}$. C'est le cardinal de Ω_j. Pour $a = 1, \ldots, k_j$, posons $w_{j,a} = w_{i_{j-1}+a}$ et notons $V_j(a)$ le sous–espace de V_j formé des fonctions $\varphi : G \to V_\sigma$ à support dans

$$X_{j,a} = X_{i_{j-1}} \coprod P n_{w_{j,a}} Q.$$

Quitte à réordonner l'orbite Ω_j, on peut supposer que $w_{j,a} = \theta^{a-1}(w_{j,1})$ et $\theta^{k_j}(w_{j,1}) = w_{j,1}$. L'automorphisme $\Pi_j(\delta_1) = \Pi(\delta_1)|_{V_j}$ de V_j permute les $V_j(a)$: on a

$$\Pi_j(\delta_1)(V_j(a)) = V_j(a+1), \quad a = 1, \ldots k_{j-1}$$

et

$$\Pi_j(\delta_1)(V_j(k_j)) = V_j(1).$$

On distingue deux cas : $k_j > 1$ et $k_j = 1$. Si $k_j > 1$, la ω–représentation Π_j/Π_{j-1} de $Q^\natural$ est dans l'image du foncteur ι_{k_j} pour $Q^\natural$ (cf. 2.5), par suite la ω–représentation $\overline{\boldsymbol{h}}_j(\Sigma)$ de $M_Q^\natural$ est dans l'image du foncteur ι_{k_j} pour $M_Q^\natural$. Si $k_j = 1$, i.e. si $\theta(w_{i_j}) = w_{i_j}$, la ω–représentation $\overline{\boldsymbol{h}}_j(\Sigma)$ de $M_Q^\natural$ vérifie

$$\overline{\boldsymbol{h}}_j(\Sigma)^\circ = h_{i_j}(\sigma)/h_{i_j-1}(\sigma) \simeq f(w_{i_j})(\sigma) = \boldsymbol{f}(w_{i_j})(\Sigma)^\circ.$$

L'isomorphisme ci–dessus n'est pas vraiment canonique : il dépend du choix d'une mesure de Haar sur l'espace quotient $(U_Q \cap w(P))\backslash U_Q$, où l'on a posé $w = w_{i_j}$. Fixons une telle mesure, disons $d\bar{u}$. Notons $\alpha : V_\sigma \to r_P^{P_{\bar{w}}}(V_\sigma)$ la projection canonique, et $\beta : V_{\pi_{i_j}} \to V_{f(w)(\sigma)}$ l'opérateur défini par

$$\beta(\varphi)(m_Q) = \delta_Q^{1/2}(m) \int_{U_Q \cap w(P)\backslash U_Q} \alpha(\varphi(n_w^{-1} u m_Q n_w)) d\bar{u}, \quad m_Q \in M_Q.$$

D'après [**BZ**, 5.5], β induit par passage au quotient l'isomorphisme cherché

$$\bar{\beta} : h_{i_j}(\sigma)/h_{i_j-1}(\sigma) \to f(w)(\sigma).$$

Puisque $\bar{\beta}$ commute aux opérateurs $\overline{\boldsymbol{h}}_j(\Sigma)(\delta_1)$ et $\boldsymbol{f}(w)(\Sigma)(\delta_1)$ — cf. l'action de $\Pi(\delta_1)$ rappelée plus haut —, c'est un isomorphisme de $\overline{\boldsymbol{h}}_j(\Sigma)$ sur $\boldsymbol{f}(w)(\Sigma)$. En conclusion, pour $\Sigma \in \mathcal{G}(M_P^\natural, \omega)$, si $|\Omega_j| > 1$ on a $\overline{\boldsymbol{h}}_j(\Sigma) \in \mathcal{G}_{0+}(M_Q^\natural, \omega)$, et sinon on a l'égalité dans $\mathcal{G}(M_Q^\natural, \omega)$

$$\overline{\boldsymbol{h}}_j(\Sigma) = \boldsymbol{f}(w_{i_j})(\Sigma).$$

La proposition est démontrée. □

4.2. Les espaces $\mathfrak{a}_P$, $\mathfrak{a}_Q^P$, $\mathfrak{a}_P^*$, etc.— Pour $P \in \mathcal{P}(G)$, on note $\mathrm{X}_F^*(M_P)$ le groupe des caractères algébriques de M_P qui sont définis sur F. On note aussi A_P le tore central déployé maximal de M_P, et $\mathrm{X}^*(A_P) = \mathrm{X}_F^*(A_P)$ le groupe des caractères algébriques de A_P — ils sont tous définis sur F. L'application $\mathrm{X}_F^*(M_P) \to \mathrm{X}^*(A_P)$, $\chi \mapsto \chi|_{A_P}$ est injective, de conoyau fini, et l'on pose

$$\mathfrak{a}_P = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathrm{X}_F^*(M_P), \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathrm{X}^*(A_P), \mathbb{R}).$$

C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie $\dim A_P$. L'application $H_P : M_P \to \mathfrak{a}_P$ définie par

$$e^{\langle \chi, H_P(m) \rangle} = |\chi(m)|_F, \quad m \in M_P,\ \chi \in \mathrm{X}_F^*(M_P),$$

a pour noyau M_P^1 et pour image un réseau de $\mathfrak{a}_P$, noté $\mathfrak{a}_{P,F}$. Ici $|\ |_F$ désigne la valeur absolue normalisée sur F. Comme la restriction de H_P à A_P coïncide avec H_{A_P}, on peut aussi poser $\mathfrak{a}_{A_P,F} = H_P(A_P)$. C'est encore un réseau de $\mathfrak{a}_P$, et un sous–groupe d'indice fini de $A_{P,F}$.

Posons

$$\mathfrak{a}_P^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathfrak{a}_P, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathfrak{a}_P, \mathbb{C}) = \mathfrak{a}_P^* \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}.$$

Pour tout sous–groupe fermé Λ de $\mathfrak{a}_P$, on note $\Lambda^\vee$ le sous–groupe de $\mathfrak{a}_P^*$ défini par

$$\Lambda^\vee = \{\nu \in \mathfrak{a}_P^* : \langle \lambda, \nu \rangle \in 2\pi\mathbb{Z},\ \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Pour $\nu \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$, on note ψ_ν le caractère non ramifié de M_P défini par

$$\psi_\nu(m) = e^{\langle H_P(m), \nu \rangle}.$$

L'application

$$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* / i\mathfrak{a}_{P,F}^\vee \to \mathfrak{P}(M_P),\ \nu \mapsto \psi_\nu$$

est un isomorphisme de groupes. Il identifie $\mathfrak{a}_P^*$ au groupe des caractères non ramifiés *positifs* de M_P, et $i\mathfrak{a}_P^*/i\mathfrak{a}_{P,F}^\vee$ au groupe des caractères non ramifiés *unitaires* de M_P. On obtient de la même manière un isomorphisme de groupes

$$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* / i\mathfrak{a}_{A_P,F}^\vee \to \mathfrak{P}(A_P),\ \nu \mapsto \chi_\nu.$$

Le groupe $\mathfrak{a}_{P,F}^\vee$ est un réseau de $\mathfrak{a}_P^*$ et un sous–groupe d'indice fini de $\mathfrak{a}_{A_P,F}^\vee$, et la projection canonique $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/i\mathfrak{a}_{P,F}^\vee \to \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/i\mathfrak{a}_{A_P,F}^\vee$ correspond, via les isomorphismes $\nu \mapsto \psi_\nu$ et $\nu \mapsto \chi_\nu$, à la restriction des caractères de $\mathfrak{P}(M_P) \to \mathfrak{P}(A_P)$, $\psi \mapsto \psi|_{A_P}$.

Soit $P, Q \in \mathcal{P}(G)$ tels que $Q \subset P$. L'inclusion $M_Q \subset M_P$ induit une application injective (restriction des caractères) $\mathrm{X}_F^*(M_P) \to \mathrm{X}_F^*(M_Q)$, et donc aussi une application surjective

$$\pi_Q^P : \mathfrak{a}_Q \to \mathfrak{a}_P,$$

dont le noyau est noté $\mathfrak{a}_Q^P$. D'autre part l'inclusion $A_P \subset A_Q$ induit une application surjective (restriction des caractères) $\mathrm{X}(A_Q) \to \mathrm{X}^*(A_P)$, et donc aussi une application injective

$$\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_Q,$$

qui est une section de π_Q^P. On obtient les décompositions

$$\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_Q^P, \quad \mathfrak{a}_Q^* = \mathfrak{a}_P^* \oplus (\mathfrak{a}_Q^P)^*,$$

où l'on a posé $(\mathfrak{a}_Q^P)^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathfrak{a}_Q^P, \mathbb{R})$.

Pour alléger l'écriture, on remplace l'indice $P_\circ$ par un indice $\circ$ dans toutes les notations précédentes. Ainsi pour $Q = P_\circ$ et $P = G$, on a les décompositions

$$\mathfrak{a}_\circ = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}_\circ^G, \quad \mathfrak{a}_\circ^* = \mathfrak{a}_G^* \oplus (\mathfrak{a}_\circ^G)^*.$$

On fixe une forme quadratique $(\cdot,\cdot)_\circ$ sur l'espace $\mathfrak{a}_\circ$, définie positive et invariante sous l'action du groupe de Weyl W_G. Cela munit $\mathfrak{a}_\circ$ d'une norme, donnée par $|\nu| = (\nu,\nu)^{1/2}$. Par dualité l'espace $\mathfrak{a}_\circ^*$ est lui aussi muni d'une norme. Pour $P \in \mathcal{P}(G)$, la décomposition $\mathfrak{a}_\circ = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_\circ^P$ est orthogonale, et la forme quadratique $(\cdot,\cdot)_\circ$ induit par restriction des formes quadratiques définies positives sur les espaces $\mathfrak{a}_P$ et $\mathfrak{a}_\circ^P$, notées $(\cdot,\cdot)_P$ et $(\cdot,\cdot)_\circ^P$. Plus généralement, pour $P, Q \in \mathcal{P}(G)$ tels que $Q \subset P$, la décomposition $\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_Q^P$ est orthogonale, et la forme quadratique $(\cdot,\cdot)_Q$ induit par restriction une forme quadratique définie positive sur l'espace $\mathfrak{a}_Q^P$, notée $(\cdot,\cdot)_Q^P$.

Remarque. — Les racines de $A_\circ$ dans $\mathrm{Lie}(G)$ sont des éléments de $\mathfrak{a}_\circ^*$, nuls sur $\mathfrak{a}_G$. Leurs restrictions à $\mathfrak{a}_\circ^G$ forment un système de racine, en général non réduit. L'ensemble des racines simples relativement au sous–groupe parabolique minimal $P_\circ$ de G, noté $\Delta_\circ^G$, est une base de $(\mathfrak{a}_\circ^G)^*$, et l'ensemble des coracines $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta_\circ^G$ est une base de $\mathfrak{a}_\circ^G$.

Pour $P \in \mathcal{P}(G)$, on définit de la même manière l'ensemble $\Delta_\circ^P$ des racines simples de $A_\circ$ dans $\mathrm{Lie}(M_P)$ relativement à $P_\circ \cap M_P$; c'est une base de $(\mathfrak{a}_\circ^P)^*$. On peut aussi considérer les éléments de $\Delta_\circ^P$ comme des formes linéaires sur $\mathfrak{a}_\circ$, ce qui fait de $\Delta_\circ^P$ un sous–ensemble de $\Delta_\circ^G$. Ainsi $\mathfrak{a}_P^G$ est le sous–espace de $\mathfrak{a}_\circ^G$ intersection des noyaux des $\alpha \in \Delta_\circ^P$.

Pour P, $Q \in \mathcal{P}(G)$ tels que $Q \subset P$, soit Δ_Q^P l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de $\Delta_\circ^P$ au sous–espace $\mathfrak{a}_Q^G$ de $\mathfrak{a}_\circ^G$. C'est une base de $(\mathfrak{a}_Q^P)^*$, et $\mathfrak{a}_P^G$ est le sous–espace de $\mathfrak{a}_Q^G$ intersection des noyaux des $\alpha \in \Delta_Q^P$. Notons que Δ_Q^P n'est en général pas la base d'un système de racines. ■

4.3. Les espaces $\mathfrak{a}_{P^\natural}$, $\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural}$, $\mathfrak{b}_{P^\natural}$, $\mathfrak{b}_{P^\natural}^*$, etc.— L'automorphisme $\theta = \mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\delta_1)$ de G induit par restriction un automorphisme de $A_\circ$, qui ne dépend pas du choix de $\delta_1 \in M_\circ^\natural$. D'où un automorphisme de $\mathfrak{a}_\circ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{X}^*(A_\circ), \mathbb{R})$, déduit de $\theta|_{A_\circ}$ par fonctorialité et que l'on note encore θ, donné par

$$\langle \chi, \theta(u)\rangle = \langle \chi \circ \theta|_{A_\circ}, u\rangle, \quad u \in \mathfrak{a}_\circ,\ \chi \in \mathrm{X}^*(A_\circ).$$

On note encore θ l'automorphisme de $\mathfrak{a}_\circ^*$ déduit de θ par dualité :

$$\langle u, \theta(u^*)\rangle = \langle \theta^{-1}(u), u^*\rangle, \quad u \in \mathfrak{a}_\circ,\ u^* \in \mathfrak{a}_\circ^*.$$

La décomposition $\mathfrak{a}_\circ = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}_\circ^G$ est W_G–stable. Elle est aussi θ–stable, et puisque θ induit une permutation de l'ensemble fini $\Delta_\circ^G$ (cf. la remarque de 4.2), il induit un automorphisme d'ordre fini de l'espace $\mathfrak{a}_\circ^G$. On peut donc supposer — i.e. on suppose ! — que la forme quadratique définie positive W_G–invariante $(\cdot,\cdot)_\circ^G$ sur $\mathfrak{a}_\circ^G$, est aussi θ–invariante.

Remarque 1. — Il n'est en général pas possible de choisir la forme quadratique définie positive W_G–invariante $(\cdot,\cdot)$ sur $\mathfrak{a}_\circ$ de telle manière qu'elle soit θ–invariante. C'est possible par exemple si la restriction de θ au centre $Z(G)$ de G est d'ordre fini.

Une hypothèse moins restrictive consiste à supposer que l'application naturelle $\mathfrak{a}_G^\theta \rightarrow \mathfrak{a}_{G,\theta}$ est un isomorphisme, où $\mathfrak{a}_G^\theta \subset \mathfrak{a}_G$ désigne le sous–espace vectoriel des vecteurs θ–invariants, et $\mathfrak{a}_{G,\theta}$ l'espace vectoriel des coinvariants de $\mathfrak{a}_G$ sous θ, c'est–à–dire le quotient de $\mathfrak{a}_G$ par le sous–espace vectoriel engendré par les $u - \theta(u)$, $u \in \mathfrak{a}_G$. En ce cas le sous–espace vectoriel $(\mathfrak{a}_G^*)^\theta \subset \mathfrak{a}_G^*$ s'identifie au dual $(\mathfrak{a}_G^\theta)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_G^\theta, \mathbb{R})$ de $\mathfrak{a}_G^\theta$. ■

Pour $P \in \mathcal{P}(G^\natural)$, les décompositions

$$\mathfrak{a}_\circ = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_\circ^P, \quad \mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}_P^G,$$

sont θ–stables. Soit $\mathfrak{a}_{P^\natural} = \mathfrak{a}_P^\theta$ le sous–espace vectoriel de $\mathfrak{a}_P$ formé des vecteurs θ–invariants. Il coïncide avec $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{X}^*(A_{P^\natural}), \mathbb{R})$ où $A_{P^\natural}$ est le plus grand tore déployé du centre $Z(M_P^\natural)$ de $M_P^\natural$ — c'est un sous–tore de A_P, et l'inclusion $\mathfrak{a}_{P^\natural} \subset \mathfrak{a}_P$ est donnée par la restriction des caractères $\mathrm{X}^*(A_P) \rightarrow \mathrm{X}^*(A_{P^\natural})$. On note :

- $\mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural} = (\mathfrak{a}_P^G)^\theta$ le sous–espace vectoriel de $\mathfrak{a}_P^G$ formé des vecteurs θ–invariants ;
- $\tilde{\mathfrak{a}}_G^{G^\natural}$ le sous–espace vectoriel de $\mathfrak{a}_G$ engendré par les $u - \theta(u)$, $u \in \mathfrak{a}_G$;
- $\mathfrak{b}_{G^\natural} = \mathfrak{a}_{G,\theta}$ l'espace vectoriel $\mathfrak{a}_G / \tilde{\mathfrak{a}}_G^{G^\natural}$ des coinvariants de $\mathfrak{a}_G$ sous θ ;
- $\mathfrak{b}_{P^\natural}$ l'espace vectoriel produit $\mathfrak{b}_{G^\natural} \times \mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural}$.

L'espace dual $\mathfrak{b}_{G^\natural}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{b}_{G^\natural}, \mathbb{R})$ coïncide avec le sous–espace vectoriel $(\mathfrak{a}_G^*)^\theta$ de $\mathfrak{a}_G^*$ formé des vecteurs θ–invariants. D'autre part, comme la forme quadratique $(\cdot,\cdot)_P^G$ sur $\mathfrak{a}_P^G$ est θ–invariante, l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural}$ dans $\mathfrak{a}_P^G$ coïncide avec le sous–espace vectoriel de $\mathfrak{a}_P^G$ engendré par les $u - \theta(u)$, $u \in \mathfrak{a}_P^G$. On en déduit que l'espace dual $(\mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural})^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural}, \mathbb{R})$ coïncide avec le sous–espace vectoriel $(\mathfrak{a}_P^G)^{*,\theta} = ((\mathfrak{a}_P^G)^*)^\theta$ de $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ formé des vecteurs θ–invariants. Par suite l'espace dual $\mathfrak{b}_{P^\natural}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{b}_{P^\natural}, \mathbb{R})$ coïncide avec le sous–espace $(\mathfrak{a}_P^*)^\theta = (\mathfrak{a}_G^*)^\theta \oplus (\mathfrak{a}_P^G)^{*,\theta}$ de $\mathfrak{a}_P^*$. On note

$$\pi_P^{P^\natural} : \mathfrak{a}_P \rightarrow \mathfrak{b}_{P^\natural}$$

la projection naturelle, produit de la projection canonique $\mathfrak{a}_G \to \mathfrak{b}_{G^\natural}$ et de la projection orthogonale $\mathfrak{a}_P^G \to \mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural}$. Enfin comme plus haut, on pose

$$\mathfrak{b}^*_{P^\natural,\mathbb{C}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{b}_{P^\natural}, \mathbb{C}) = \mathfrak{b}^*_{P^\natural} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Pour P, $Q \in \mathcal{P}(G^\natural)$ tels que $Q \subset P$, on définit de la même manière l'espace $\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural} = (\mathfrak{a}_Q^P)^\theta$. On a les décompositions

$$\mathfrak{b}_{Q^\natural} = \mathfrak{b}_{P^\natural} \oplus \mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural}, \quad \mathfrak{b}^*_{Q^\natural} = \mathfrak{b}^*_{P^\natural} \oplus (\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural})^*,$$

où l'on a posé $(\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural})^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural}, \mathbb{R})$. Soit

$$\pi_Q^{P^\natural} : \mathfrak{a}_Q \to \mathfrak{b}_{P^\natural}$$

la projection naturelle, donnée par $\pi_Q^{P^\natural} = \pi_P^{P^\natural} \circ \pi_Q^P$. Notant

$$\pi_{Q^\natural}^{P^\natural} : \mathfrak{b}_{Q^\natural} \to \mathfrak{b}_{P^\natural}$$

la projection orthogonale, on a l'égalité

$$\pi_Q^{P^\natural} = \pi_{Q^\natural}^{P^\natural} \circ \pi_Q^{Q^\natural}.$$

Remarque 2. — Soit $\tilde{\mathfrak{a}}_P^{P^\natural}$ le sous–espace de $\mathfrak{a}_P$ engendré par les $u - \theta(u)$, $u \in \mathfrak{a}_P$, et $\tilde{a}_{P^\natural}$ son orthogonal dans $\mathfrak{a}_P$. Soit aussi $\mathfrak{a}_P^{P^\natural}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{P^\natural}$ dans $\mathfrak{a}_P$. Les espaces $\tilde{\mathfrak{a}}_{P^\natural}$ et $\mathfrak{a}_P^{P^\natural}$ ne sont en général pas θ–stables. Ils le sont par exemple si la forme quadratique $(\cdot,\cdot)_\circ$ sur $\mathfrak{a}_\circ$ est θ–invariante, c'est–à–dire si la forme quadratique $(\cdot,\cdot)_G$ sur $\mathfrak{a}_G$ est θ–invariante, auquel cas on a les égalités $\tilde{\mathfrak{a}}_{P^\natural} = \mathfrak{a}_{P^\natural}$ et $\mathfrak{a}_P^{P^\natural} = \tilde{\mathfrak{a}}_P^{P^\natural}$, et la décomposition θ–invariante $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{P^\natural} \oplus \mathfrak{a}_P^{P^\natural}$. En ce cas $\mathfrak{b}_{P^\natural} = \mathfrak{a}_{P^\natural}$, et $\pi_P^{P^\natural} : \mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_{P^\natural}$ est la projection orthogonale. ■

Pour $P \in \mathcal{P}(G^\natural)$, l'application $\mathfrak{a}_P^* \to \mathfrak{P}(M_P)$, $\nu \mapsto \psi_\nu$ est θ–équivariante. Elle identifie $\mathfrak{b}^*_{P^\natural}$ au groupe des caractères non ramifiés positifs de $M_P^\natural$. Pour tout sous–groupe fermé Λ de $\mathfrak{b}_{P^\natural}$, on note $\Lambda^\vee$ le sous–groupe de $\mathfrak{b}^*_{P^\natural}$ défini comme plus haut en remplaçant la paire $(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_P^*)$ par la paire $(\mathfrak{b}_{P^\natural}, \mathfrak{b}^*_{P^\natural})$. Soit $\mathfrak{b}_{P^\natural,F}$ l'image de $\mathfrak{a}_{P,F}$ par l'application $\pi_P^{P^\natural} : \mathfrak{a}_P \to \mathfrak{b}_{P^\natural}$. On a l'égalité

$$\mathfrak{b}^\vee_{P^\natural,F} = \mathfrak{a}^\vee_{P,F} \cap \mathfrak{b}^*_{P^\natural},$$

et l'application $\nu \mapsto \psi_\nu$ induit par restriction un morphisme injectif

$$\mathfrak{b}^*_{P^\natural,\mathbb{C}}/i\mathfrak{b}^\vee_{P^\natural,F} \to \mathfrak{P}(M_P^\natural).$$

L'image de ce morphisme est un sous–tore (algébrique, complexe) de $\mathfrak{P}(M_P^\natural)$, de dimension celle de $\mathfrak{P}(M_P^\natural)$. Ce tore est la composante neutre $\mathfrak{P}^0(M_P^\natural)$ de $\mathfrak{P}(M_P^\natural)$, et le morphisme $\nu \mapsto \psi_\nu$ identifie $\mathfrak{b}^*_{P^\natural}$ (resp. $i\mathfrak{b}^*_{P^\natural}/i\mathfrak{b}^\vee_{P^\natural,F}$) au sous–groupe de $\mathfrak{P}^0(M_P^\natural)$ formé des caractères positifs (resp. unitaires). Soit aussi $\mathfrak{b}_{A_{P^\natural},F}$ l'image de $H_P(A_{P^\natural}(F))$ par l'application $\pi_P^{P^\natural}$. L'application $\nu \mapsto \chi_\nu$ induit par restriction un isomorphisme de groupes

$$\mathfrak{b}^*_{P^\natural,\mathbb{C}}/i\mathfrak{b}^\vee_{A_{P^\natural},F} \to \mathfrak{P}(A_{P^\natural}), \quad \mathfrak{P}(A_{P^\natural}) = \mathrm{Hom}(A_{P^\natural}/A^1_{P^\natural}, \mathbb{C}^\times).$$

Comme en 4.2, la projection canonique $\mathfrak{b}^*_{P^\natural,\mathbb{C}}/i\mathfrak{b}^\vee_{P^\natural,F} \to \mathfrak{b}^*_{P^\natural,\mathbb{C}}/i\mathfrak{b}^\vee_{A_{P^\natural},F}$ correspond, via les isomorphismes $\nu \mapsto \psi_\nu$ et $\nu \mapsto \chi_\nu$, à la restriction des caractères $\mathfrak{P}^0(M_P^\natural) \to \mathfrak{P}(A_{P^\natural})$.

Remarque 3. — Posons $A_P^\natural = A_P \cdot \delta_1$. C'est un sous–espace tordu de $M_P^\natural$ (isomorphe à $A_P^\natural \cdot \delta$ pour tout $\delta \in M_P^\natural$), et le groupe $\mathfrak{P}(A_P^\natural)$ des caractères non ramifiés de $A_P^\natural$ est par définition le sous–groupe de $\mathfrak{P}(A_P)$ formé des éléments θ–invariants. Notons $\mathfrak{b}_{A_P^\natural,F}$ l'image de $\mathfrak{a}_{A_P,F}$ par l'application $\pi_P^{P^\natural}$. C'est un réseau de $\mathfrak{a}_{P^\natural}$ qui vérifie la double inclusion

$$\mathfrak{b}_{A_{P^\natural},F} \subset \mathfrak{b}_{A_P^\natural,F} \subset \mathfrak{b}_{P^\natural,F}.$$

La restriction des caractères $\mathfrak{P}(M_P^\natural) \to \mathfrak{P}(A_P^\natural)$ est un morphisme de variétés algébriques, de noyau et de conoyau finis. D'après ce qui précède, il induit un morphisme surjectif $\mathfrak{P}^0(M_P^\natural) \to \mathfrak{P}^0(A_P^\natural)$ de noyau isomorphe au groupe (fini) $i\mathfrak{b}^\vee_{A_P^\natural,F}/i\mathfrak{b}^\vee_{P^\natural,F}$. ■

Notation. — Pour $P \in \mathcal{P}(G)$, on pose

$$d(M_P) = \dim \mathfrak{P}(M_P) \ (= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_P),$$

et pour $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, on pose

$$d(M_P^\natural) = \dim \mathfrak{P}(M_P^\natural) \ (= \dim \mathfrak{P}^0(M_P^\natural) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{b}_{P^\natural})).$$

4.4. Les morphismes ${}^\omega T_{P^\natural,\mathbb{C}}$. — Pour $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, on note ${}^\omega T_{P^\natural}$ le foncteur

$${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural} \circ {}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathfrak{R}(G^\natural,\omega) \to \mathfrak{R}(G^\natural,\omega).$$

Il induit un morphisme de $\mathbb{C}$–espaces vectoriels

$${}^\omega T_{P^\natural,\mathbb{C}} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega).$$

On note $\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega)$ le sous–espace de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ engendré par les ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega))$ pour $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, $P^\natural \neq G^\natural$, et l'on pose

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)/\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega).$$

On définit comme dans le cas non tordu une filtration décroissante $\{\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^\natural,\omega)\}$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$: pour chaque entier $i \geq -1$, on pose

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^\natural,\mathbb{C}) = \sum_{P^\natural,\, d(M_P)>i} {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega)),$$

où $P^\natural$ parcourt les éléments de $\mathcal{P}(G^\natural)$. On a donc

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^\natural,\omega) = \mathcal{G}(G^\natural,\omega), \quad i < d(G),$$

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^\natural,\omega) = 0, \quad i \geq d(M_\circ),$$

et

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C},d(G)}(G^\natural,\omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega).$$

Proposition. — *Soit d un entier tel que $d(G) \leq d < d(M_\circ)$. Il existe une famille de nombres rationnels $\lambda_d = \{\lambda_d(P^\natural) : P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural),\ d(M_P) > d\}$ telle que le $\mathbb{C}$–endomorphisme $\boldsymbol{A}_d = \boldsymbol{A}_{\lambda_d}$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ défini par*

$$\boldsymbol{A}_d = \mathrm{id} + \sum_{P^\natural,\, d(M_P)>d} \lambda_d(P^\natural)\, {}^\omega T_{P^\natural,\mathbb{C}}$$

vérifie les propriétés :

$$\ker \boldsymbol{A}_d = \mathcal{G}_{\mathbb{C},d}(G^\natural,\omega), \quad \boldsymbol{A}_d \circ \boldsymbol{A}_d = \boldsymbol{A}_d.$$

Démonstration. — Elle nécessite d'établir quelques lemmes. Le lemme 1 étend au cas tordu la propriété d'invariance du morphisme induction parabolique sous l'action de W_G par conjugaison [**BDK**, lemma 5.4]. Le lemme 2 est la variante tordue de [**BDK**, cor. 5.4].

Lemme 1. — *Soit $P^\natural$, $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$. Supposons que $M_Q^\natural = w(M_P^\natural)$ $(= n_w \cdot M_P^\natural \cdot n_w^{-1})$ pour un $w \in W_{G^\natural}$. Pour $\Sigma \in \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_P^\natural,\omega)$, on a l'égalité dans $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural,\omega)$*

$$^\omega i_{Q^\natural}^{G^\natural}({}^w\Sigma) = {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma).$$

Démonstration. — Par transport de structures, on a l'égalité

$$^\omega i_{w(P^\natural),\mathbb{C}}^{G^\natural}({}^w\Sigma) = {}^\omega i_{P^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}(\Sigma),$$

où ${}^\omega i_{\omega(P^\natural),\mathbb{C}}^{G^\natural}$ est le morphisme induction parabolique normalisé de $M_Q^\natural$ à $G^\natural$ par rapport au sous–espace parabolique (non standard) $w(P^\natural) = M_Q^\natural \cdot U_{w(P)}$ de $G^\natural$. Rappelons que l'indice $\mathbb{C}$ indique que l'on est dans $\mathcal{G}_\mathbb{C}$, cf. 2.10. Il s'agit de voir que l'on peut remplacer $w(P^\natural)$ par $w(M_P^\natural)\cdot U_\circ = Q^\natural$.

La double classe $W_{M_Q} w W_{M_P} = W_{M_Q} w = w W_{M_P}$ est θ–stable. Quitte à remplacer w par un élément de $W_{M_Q}w$, on peut supposer que $w \in W_{G^\natural}^{P,Q}$. Alors $w(M_P \cap P_\circ) = M_Q \cap P_\circ$, et pour tout sous–groupe parabolique standard R' de M_P, $w(R')$ est un sous–groupe parabolique standard de M_Q. On en déduit que pour $R^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ tel que $R^\natural \subset P^\natural$, $w(R^\natural \cap M_P^\natural)$ est un sous–espace parabolique standard de $M_Q^\natural$ de composante de Levi standard $\omega(M_R^\natural)$.

D'après le lemme 1 de 2.13, on peut supposer que $\Sigma = {}^\omega i_{R^\natural,\mathbb{C}}^{P^\natural}(\Xi'\Sigma')$ pour un $R \in \mathcal{P}(G^\natural)$ tel que $R^\natural \subset P^\natural$, une ω_u–représentation $\Sigma' \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C},\mathrm{t}}(M_R^\natural,\omega_\mathrm{u})$ et un caractère $\Xi' \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_R^\natural,|\omega|)$ tel que Ξ'° est positif par rapport à $U_R \cap M_P$. Par transitivité du morphisme induction parabolique, on a l'égalité ${}^\omega i_{P^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}(\Sigma) = {}^\omega i_{R^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}(\Xi'\Sigma')$ et (d'après ce qui précède)

$$^\omega i_{Q^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}({}^w\Sigma) = {}^\omega i_{w(R^\natural\cap M_P^\natural)\cdot U_Q,\mathbb{C}}^{G^\natural}({}^w(\Xi'\Sigma')).$$

Quitte à remplacer $P^\natural$ par $R^\natural$ et Σ par $\Xi'\Sigma'$, on peut donc supposer que $\Sigma = \Xi'\Sigma'$ pour une ω_u–représentation $\Sigma' \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C},\mathrm{t}}(M_P^\natural,\omega_\mathrm{u})$ et un caractère $\Xi' \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural,|\omega|)$ tel que $\Xi'^\circ > 0$.

Supposons qu'il existe un sous–ensemble Zariski–dense Ω de la sous–variété irréductible $\mathfrak{X} = \{\Psi\Xi' : \Psi \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}^0(M_P^\natural)\}$ de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural,|\omega|)$ tel que pour tout $\Psi \in \Omega$, on a l'égalité

$$^\omega i_{P^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}(\Psi\Sigma') = {}^\omega i_{Q^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}({}^w(\Psi\Sigma')).$$

Pour $\phi \in \mathcal{H}^\natural$, les fonctions $\Psi \mapsto \Phi_\phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Psi\Sigma'))$ et $\Psi \mapsto \Phi_\phi({}^\omega i_{Q^\natural}^{G^\natural}({}^w(\Psi\Sigma')))$ sur $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural,|\omega|)$ sont régulières (2.21), d'où l'égalité

$$\Phi_\phi({}^\omega i_{P^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}(\Sigma)) = \Phi_\phi({}^\omega i_{Q^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}({}^w\Sigma)).$$

Enfin la propriété d'indépendance linéaire des caractères–distributions des ω–représentations G–irréductibles de $G^\natural$ [**L2**, 8.5, prop.] implique l'égalité

$$^\omega i_{P^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}(\Sigma) = {}^\omega i_{Q^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}({}^w\Sigma).$$

Reste à prouver l'existence de Ω. Pour $\nu \in \mathfrak{b}_{P^\natural,\mathbb{C}}^*$, notons Ψ_ν l'élément de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}^0(M_P^\natural)$ défini par $\Psi_\nu = \psi_\nu^{\delta_1}$ (4.3, et remarque 2 de 2.11) ; on a donc $\Psi_\nu^\circ = \psi_\nu$ et $\psi_\nu|_{A_{P^\natural}} = \chi_\nu$. Soit $\mathbf{\Sigma}'$ une ω_u–représentation M_P–irréductible de $M_P^\natural$ dans la classe d'isomorphisme Σ'. Puisque $\mathbf{\Sigma}'$ est unitaire (2.12, définition), son caractère central (cf. 2.8, remarque 3) l'est aussi. Choisissons une uniformisante ϖ de F, et posons $A_{P^\natural}^\varpi = \mathrm{Hom}(\mathrm{X}^*(A_{P^\natural}),\langle\varpi\rangle)$. Via la décomposition $A_{P^\natural} = A_{P^\natural}^1 \times A_{P^\natural}^\varpi$, la restriction à $A_{P^\natural}^\varpi$ du caractère central de Σ' définit un caractère non ramifié unitaire de $A_{P^\natural}$ (cf. 2.11, exemple), i.e. de la forme $\chi_{i\mu_0}$ pour un élément $\mu_0 \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$. Posons $\mathbf{\Sigma}'_0 = \Psi_{-i\mu_0}\cdot\mathbf{\Sigma}'$. C'est une ω_u–représentation M_P–irréductible tempérée de $M_P^\natural$, de classe d'isomorphisme $\Sigma'_0 = \Psi_{-i\mu_0}\Sigma'$. D'autre part, le caractère ω est trivial sur le centre

$Z(M_P^\natural)$ de $M_P^\natural$, par conséquent la restriction de Ξ'° au tore $A_{P^\natural}$ est un caractère non ramifié positif de $A_{P^\natural}$, i.e. de la forme χ_{η_0} pour un élément $\eta_0 \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$ (cf. 4.3). Posons $\Xi_0' = \Psi_{-\eta_0} \cdot \Xi'$. C'est un élément de $\mathfrak{X}$ vérifiant $\Xi_0'(\delta_1) = \Xi'(\delta_1)$ et $\Xi_0'|_{A_{P^\natural}} = 1$. En particulier, Ξ_0' se relève en un élément $\widetilde{\Xi}_0' \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural, |\omega|)$. Posons $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \Xi_0' \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0'$. C'est une ω–représentation M_P–irréductible de $M_P^\natural$, de classe d'isomorphisme $\Sigma_0 = \Xi_0'\Sigma_0'$. Pour $\nu \in \mathfrak{b}_{P^\natural,\mathbb{C}}^*$, d'après le lemme de 2.10 (réciprocité de Frobenius), on a isomorphisme naturel

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{G^\natural}({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0), {}^\omega i_{Q^\natural}^{G^\natural}({}^{n_w}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0)) \simeq \mathrm{Hom}_{M_Q^\natural}(\boldsymbol{h}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0), {}^{n_w}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0));$$

où $\boldsymbol{h}$ désigne le foncteur ${}^\omega r_{G^\natural}^{Q^\natural} \circ {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}$. D'après le lemme géométrique (4.1, proposition), l'image $\boldsymbol{h}_{\mathbb{C}}(\Psi_\nu\Sigma_0)$ de $\boldsymbol{h}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0)$ dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural, \omega)$ est donnée par

$$(**) \qquad \boldsymbol{h}_{\mathbb{C}}(\Psi_\nu\Sigma_0) = \sum_s \boldsymbol{f}_{\mathbb{C}}(s)(\Psi_\nu\Sigma_0),$$

où s parcourt les éléments de $W_{G^\natural}^{P,Q}$. Pour $s \in W_{G^\natural}^{P,Q}$, l'élément $\boldsymbol{f}_{\mathbb{C}}(s)(\Psi_\nu\Sigma_0)$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural, \omega)$ a un caractère central, et la restriction à $A_{Q^\natural}^\varpi$ $(= w(A_{P^\natural}^\varpi))$ de ce caractère, identifiée comme plus haut à un caractère non ramifié de $A_{Q^\natural}$ via la décomposition $A_{Q^\natural} = A_{Q^\natural}^\varpi \times A_{Q^\natural}^1$, est donnée par la projection orthogonale (cf. 4.3) de $s(\nu) \in s(\mathfrak{b}_{P_s^\natural,\mathbb{C}}^*) = \mathfrak{b}_{Q_s^\natural,\mathbb{C}}^*$ sur $\mathfrak{b}_{Q^\natural,\mathbb{C}}^*$. De la même manière, la restriction à $A_{Q^\natural}^\varpi$ du caractère central de ${}^w(\Psi_\nu\Sigma_0)$ est donnée par $w(\nu)$. Comme s et w opèrent isométriquement sur les espaces en question, on en déduit que pour ν générique, seul l'élément $s = w$ dans la somme $(**)$ peut donner une contribution non triviale à l'espace Hom de droite dans l'isomorphisme $(*)$, et comme ${}^{n_w}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0)$ est un quotient de $\boldsymbol{h}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0)$ — cf. la démonstration de la proposition de 4.1 —, il en donne effectivement une. On obtient que pour $\nu \in \mathfrak{b}_{P^\natural,\mathbb{C}}^*$ générique, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{M_Q^\natural}({}^\omega i_{P^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0), {}^\omega i_{Q^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}({}^{n_w}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0)) = 1.$$

Le même raisonnement entraîne que pour $\nu \in \mathfrak{b}_{P^\natural,\mathbb{C}}^*$ générique, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_{M_P^\natural}({}^\omega i_{P^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0)) = 1$$

et

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_{M_Q^\natural}({}^\omega i_{Q^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}({}^w(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0))) = 1$$

D'après le raisonnement ci–dessus, on peut remplacer la condition « $\nu \in \mathfrak{b}_{P^\natural,\mathbb{C}}^*$ générique » par « $\nu = i\mu$, $\mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$ générique ». Pour $\nu \in \mathfrak{b}_{P^\natural,\mathbb{C}}^*$, on a

$${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0) = \widetilde{\Xi}_0' \cdot {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Psi_\nu \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0').$$

Pour $\mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$, la représentation ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Psi_{i\mu} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0')^\circ = i_P^G(\psi_{i\mu}(\boldsymbol{\Sigma}_0')^\circ)$ de G est unitaire et donc semisimple, par suite la ω–représentation ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Psi_{i\mu} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0)$ de $G^\natural$ est elle aussi semisimple (c'est–à–dire somme directe de ω–représentations irréductibles de $G^\natural$). De même, toujours pour $\mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$, la ω–représentation ${}^\omega i_{Q^\natural}^{G^\natural}({}^{n_w}(\Psi_{i\mu} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0))$ de $G^\natural$ est semisimple. Par suite pour $\mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$ générique, les éléments ${}^\omega i_{P^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}(\Psi_{i\mu}\Sigma_0)$ et ${}^\omega i_{P^\natural,\mathbb{C}}^{G^\natural}({}^w(\Psi_{i\mu}\Sigma_0))$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ appartiennent à $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$, et sont égaux.

Pour $\mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$, on a $\Psi_{i\mu}\Sigma_0 = \Psi_{-\eta_0 + i(\mu - \mu_0)}\Xi'\Sigma'$. On conclut en remarquant que

$$\Omega = \{\lambda\Psi_{-\eta_0 + i(\mu - \mu_0)}\Xi' : \mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^* \text{ générique}, \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$$

est un sous–ensemble Zariski–dense de $\mathfrak{X}$. □

Lemme 2. — *Soit $P^\natural$, $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$.*

(1) *Pour $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$, on a l'égalité dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$*

$$ {}^{\omega}T_{Q^\natural,\mathbb{C}} \circ {}^{\omega}i^{G^\natural}_{P^\natural}(\Sigma) = \sum_w {}^{\omega}i^{G^\natural}_{P^\natural_{\bar w}} \circ {}^{\omega}r^{P^\natural_{\bar w}}_{P^\natural}(\Sigma), $$

où w parcourt les éléments de $W^{P,Q}_{G^\natural}$.

(2) *Pour $\Pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$, on a l'égalité dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$*

$$ {}^{\omega}T_{Q^\natural,\mathbb{C}} \circ {}^{\omega}T_{P^\natural,\mathbb{C}}(\Pi) = \sum_w {}^{\omega}T_{P^\natural_{\bar w},\mathbb{C}}(\Pi), $$

où w parcourt les éléments de $W^{P,Q}_{G^\natural}$.

Démonstration. — Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, pour $w \in W_{G^\natural}$, on note « w » le foncteur « $\Sigma \to {}^{n_w}\Sigma$ ». D'après la proposition de 4.1, on a l'égalité dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$

$$ {}^{\omega}T_{Q^\natural,\mathbb{C}} \circ {}^{\omega}i^{G^\natural}_{P^\natural}(\Sigma) = \sum_w {}^{\omega}i^{G^\natural}_{Q^\natural} \circ {}^{\omega}i^{Q^\natural}_{Q^\natural_w} \circ w \circ {}^{\omega}r^{P^\natural_{\bar w}}_{P^\natural}(\Sigma), $$

où w parcourt les éléments de $W^{P,Q}_{G^\natural}$. D'après le lemme 1, pour $w \in W_{P^\natural,Q^\natural}$, on a l'égalité dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^\natural_Q,\omega)$

$$ {}^{\omega}i^{Q^\natural}_{Q^\natural_w} \circ w \circ {}^{\omega}r^{P^\natural_{\bar w}}_{P^\natural}(\Sigma) = {}^{\omega}i^{Q^\natural}_{P^\natural_{\bar w}} \circ {}^{\omega}r^{P^\natural_{\bar w}}_{P^\natural}(\Sigma). $$

D'où le point (1), par transitivité du morphisme induction parabolique.

Quant au point (2), par transitivité du morphisme restriction de Jacquet, d'après la proposition de 4.1, on a l'égalité dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^\natural_Q,\omega)$

$$ {}^{\omega}r^{Q^\natural}_{G^\natural} \circ {}^{\omega}T_{P^\natural,\mathbb{C}}(\Pi) = \sum_w {}^{\omega}i^{Q^\natural}_{Q^\natural_w} \circ w \circ {}^{\omega}r^{P^\natural_{\bar w}}_{G^\natural}(\Pi), $$

où w parcourt les éléments de $W^{P,Q}_{G^\natural}$. On obtient le point (2) en appliquant le morphisme ${}^{\omega}i^{G^\natural}_{Q^\natural}$ à cette expression (grâce au lemme 1, et par transitivité du morphisme induction parabolique). □

On peut maintenant démontrer la proposition. Pour alléger l'écriture, on pose

$$ \mathcal{G}_{\mathbb{C},i} = \mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^\natural,\omega), \quad i \geq -1. $$

D'après le point (1) du lemme 2, pour $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, l'opérateur ${}^{\omega}T_{Q^\natural,\mathbb{C}}$ préserve la filtration $\{\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}\}$. Pour $P^\natural$, $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, puisque $W_G(P,Q)\cap W^{P,Q}_G$ est un système de représentants des classes de

$$ W_{M_Q}\backslash W_G(P,Q) = W_G(P,Q)/W_{M_P}, $$

l'ensemble $W_{G^\natural}(P,Q)\cap W^{P,Q}_{G^\natural}$ paramétrise le sous–ensemble

$$ [W_{M_Q}\backslash W_G(P,Q)]^\theta \subset W_{M_Q}\backslash W_G(P,Q) $$

formé des classes θ–invariantes, et s'il est non vide alors il est de cardinal

$$ p_{Q^\natural} = |[W_{M_Q}\backslash W_G(Q,Q)]^\theta|. $$

D'après loc. cit. et le lemme 1, on en déduit que pour et $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^\natural_P,\omega)$, on a

$$ {}^{\omega}T_{Q^\natural,\mathbb{C}} \circ {}^{\omega}i^{G^\natural}_{P^\natural}(\Sigma) \equiv \begin{cases} p_{Q^\natural}\,{}^{\omega}i^{G^\natural}_{P^\natural}(\Sigma) \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{G}_{\mathbb{C},d(M_Q)}) & \text{si } W_{G^\natural}(P,Q)\cap W^{P,Q}_{G^\natural} \neq \emptyset \\ 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{G}_{\mathbb{C},d(M_Q)}) & \text{sinon} \end{cases}. $$

Pour $k > d$, choisissons un ordre $\{P^\natural_{k,1}, \ldots, P^\natural_{k,n(k)}\}$ sur l'ensemble des $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ tels que $d(M_P) = k$, et notons $U_k : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ le morphisme défini par

$$U_k = (T_{k,n(k)} - p_{k,n(k)}) \circ \cdots \circ (T_{k,1} - p_{k,1});$$

où l'on a posé

$$T_{k,i} = {}^\omega T_{P^\natural_{k,i},\mathbb{C}}, \quad p_{k,i} = p_{P^\natural_{k,i}}.$$

D'après ce qui précède, l'opérateur U_k préserve la filtration $\{\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}\}$ et annule $\mathcal{G}_{\mathbb{C},k-1}/\mathcal{G}_{\mathbb{C},k}$. Posons

$$\boldsymbol{A}'_d = U_{d(M_\circ)} \circ \cdots \circ U_{d+1}.$$

On a $\boldsymbol{A}'_d(\mathcal{G}_{\mathbb{C},d}) \subset \mathcal{G}_{\mathbb{C},d(M_\circ)} = 0$, et d'après le point (2) du lemme 2, il existe un $\mu \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ et des $\lambda_d(P^\natural) \in \mathbb{Q}$ pour $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, $d(M^\natural_P) > d$, tels que

$$\boldsymbol{A}'_d = \mu(\mathrm{id} + \sum_{P^\natural,\, d(M_P) > d} \lambda_d(P^\natural)\, {}^\omega T_{P^\natural,\mathbb{C}}).$$

L'opérateur $\boldsymbol{A}_d = \mu^{-1}\boldsymbol{A}'_d : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega) \to \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ vérifiant

$$\boldsymbol{A}_d(\Pi) \equiv \Pi \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{G}_{\mathbb{C},d}(G^\natural, \omega)),$$

on a bien

$$\ker \boldsymbol{A}_d = \mathcal{G}_{\mathbb{C},d}(G^\natural, \omega), \quad \boldsymbol{A}_d \circ \boldsymbol{A}_d = \boldsymbol{A}_d.$$

Cela achève la démonstration de la proposition. □

Variante. — On peut définir une autre filtration décroisssante $\{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)_i\}$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$, en remplaçant la condition $d(M_P) > i$ par la condition $d(M^\natural_P) > i$: pour chaque entier $i \geq -1$, on pose

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \mathbb{C})_i = \sum_{P^\natural,\, d(M^\natural_P) > i} {}^\omega i^{G^\natural}_{P^\natural}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^\natural_P, \omega)),$$

où $P^\natural$ parcourt les éléments de $\mathcal{P}(G^\natural)$. On a donc

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)_i = \mathcal{G}(G^\natural, \omega), \quad i < d(G^\natural),$$

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)_i = 0, \quad i \geq d(M^\natural_\circ).$$

On peut aussi, grâce au lemme 2, établir la variante suivante de la proposition :

Soit d' un entier tel que $d(G^\natural) \leq d' < d(M^\natural_\circ)$. Il existe une famille de nombres rationnels $\mu_{d'} = \{\mu_{d'}(P^\natural) : P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural),\, d(M^\natural_P) > d'\}$ telle que le $\mathbb{C}$–endomorphisme $\boldsymbol{B}_{d'} = \boldsymbol{B}_{\mu_{d'}}$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ défini par

$$\boldsymbol{B}_{d'} = \mathrm{id} + \sum_{P^\natural,\, d(M^\natural_P) > d} \mu_{d'}(P^\natural)\, {}^\omega T_{P^\natural,\mathbb{C}}$$

vérifie les propriétés :

$$\ker \boldsymbol{B}_{d'} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)_{d'}, \quad \boldsymbol{B}_{d'} \circ \boldsymbol{B}_{d'} = \boldsymbol{B}_{d'}. \qquad \blacksquare$$

4.5. Actions duales de $\mathfrak{Z}(G)$ et de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$.— Commençons par quelques rappels sur le « centre ». Pour P, $Q \in \mathcal{P}(G)$ tels que $Q \subset P$, l'application naturelle

$$i_{P,Q} : \Theta(M_Q) \to \Theta(M_P),$$

qui a $[L,\rho]_{M_Q}$ associe $[L,\rho]_{M_P}$, est un morphisme *fini* de variétés algébriques. Par dualité il induit un morphisme d'anneaux

$$i_{P,Q}^* : \mathfrak{Z}(M_P) \to \mathfrak{Z}(M_Q),$$

donné par

$$f_{i_{P,Q}^*(z)}(x) = f_z(i_{P,Q}(x)), \quad z \in \mathfrak{Z}(M_P),\, x \in \Theta(M_Q).$$

Ce morphisme $i_{P,Q}^*$ fait de $\mathfrak{Z}(M_Q)$ un $\mathfrak{Z}(M_P)$-module de type fini, et d'après [**BD**, 2.13–2.16], on a le

Lemme 1. — *Soit P, $Q \in \mathcal{P}(G)$ tels que $Q \subset P$. Soit $z \in \mathfrak{Z}(M_P)$ et $t = i_{P,Q}^*(z) \in \mathfrak{Z}(M_Q)$.*

(1) *Pour toute représentation σ de M_Q, l'endomorphisme $i_Q^P(t)$ de $i_Q^P(\sigma)$ coïncide avec z.*

(2) *Pour toute représentation π de M_P, l'endomorphisme $r_P^Q(z)$ de $r_P^Q(\pi)$ coïncide avec t.*

Rappelons (3.1) que l'anneau $\mathfrak{Z}(G) = \prod_{\mathfrak{s}} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$ opère sur l'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$: pour $z \in \mathcal{Z}(G)$ et $\Phi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$, $z\cdot\Phi$ est l'élément de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$ est donné par

$$(z\cdot\Phi)(\Pi) = f_z(\theta_G(\Pi^\circ))\Phi(\Pi), \quad \Pi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega).$$

D'après le lemme 1, pour $P^\natural$, $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ tels que $Q^\natural \subset P^\natural$, les morphismes $({}^\omega i_{P^\natural}^{Q^\natural})^*$ et $({}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural})^*$ sont des morphismes de $\mathfrak{Z}(M_P)$-modules, i.e. on a

$$({}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural})^*(z\cdot\Phi) = i_{P,Q}^*(z)\cdot({}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural})^*(\Phi), \quad \Phi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega)^*,\, z \in \mathfrak{Z}(M_P),$$

et

$$({}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural})^*(i_{P,Q}^*(z)\cdot\Phi) = z\cdot({}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural})^*(\Phi).$$

On a aussi une action du groupe $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$ sur l'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$: pour $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$ et $\Phi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$, on pose

$$(\Psi\Phi)(\Pi) = \Phi(\Psi\Pi), \quad \Pi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega).$$

Lemme 2. — *On a :*

(1) $\mathfrak{Z}(G)\cdot\mathcal{F}(G^\natural,\omega) = \mathcal{F}(G^\natural,\omega)$ *et* $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)\mathcal{F}(G^\natural,\omega) = \mathcal{F}(G^\natural,\omega)$.

(2) $\mathfrak{Z}(G)\cdot\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega) = \mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega)$ *et* $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega) = \mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega)$.

Démonstration. — Soit $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ et $\Phi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$. Pour $z \in \mathfrak{Z}(G)$ et $\Sigma \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega)$, posant $t = i_{G,P}^*(z) \in \mathfrak{Z}(M_P)$, on a

$$\begin{aligned}
(z\cdot\Phi)({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)) &= ({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(z\cdot\Phi)(\Sigma)\\
&= (t\cdot({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(\Phi))(\Sigma)\\
&= f_t(\theta_{M_P}(\Sigma^\circ))({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(\Phi)(\Sigma).
\end{aligned}$$

Supposons que Φ appartient à $\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$. Alors $({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(\Phi)$ appartient à $\mathcal{F}(M_P^\natural,\omega)$, d'après la propriété de transitivité du morphisme induction parabolique. Par suite l'application

$$\Xi \mapsto (z\cdot\Phi)({}^\omega \iota_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\Sigma))$$

est une fonction régulière sur $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural)$. Comme par ailleurs le « support inertiel » de $z\cdot\Phi$ — c'est–à–dire l'ensemble des $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}_{G^\natural,\omega}(G)$ tels que $\theta_{G^\natural}(\Pi)=\mathfrak{s}$ pour un $\Pi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ vérifiant $(z\cdot\Phi)(\Pi)\neq 0$ — est contenu dans celui de Φ, on a l'égalité $\mathfrak{Z}(G)\cdot\mathcal{F}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$. La seconde égalité du point (1) est claire, puisque pour $\Psi\in\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$ on a

$$\Psi\,{}^{\omega}i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)={}^{\omega}i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Psi|_{M_P^\natural}\Sigma).$$

Quant au point (2), la première égalité résulte du fait que l'application $\phi\mapsto\Phi_\phi$ est un morphisme de $\mathfrak{Z}(G)$–module (lemme de 3.1), et la seconde du fait qu'elle est $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$–équivariante pour l'action naturelle de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$ sur $\mathcal{H}^\natural$ (donnée par $(\Psi,\phi)\mapsto\Psi\phi$). □

4.6. Induction parabolique et restriction de Jacquet : morphismes duaux. — Pour $P^\natural$, $Q^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ tels que $Q^\natural\subset P^\natural$, le morphisme ${}^{\omega}i_{Q^\natural}^{P^\natural}:\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural,\omega)\to\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega)$ induit par dualité un morphisme $\mathbb{C}$–linéaire

$$({}^{\omega}i_{Q^\natural}^{P^\natural})^*:\mathcal{G}(M_P^\natural,\omega)^*\to\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural,\omega)^*.$$

Précisément, on a

$$({}^{\omega}i_{Q^\natural}^{P^\natural})^*(\Phi)(\Sigma)=\Phi({}^{\omega}i_{Q^\natural}^{P^\natural}(\Sigma)),\quad \Phi\in\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega),\ \Sigma\in\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural,\omega).$$

De la même manière, le morphisme ${}^{\omega}r_{P^\natural}^{Q^\natural}:\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega)\to\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural,\omega)$ induit par dualité un morphisme $\mathbb{C}$–linéaire

$$({}^{\omega}r_{P^\natural}^{Q^\natural})^*:\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural,\omega)^*\to\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega)^*.$$

Proposition. — *Pour $P^\natural$, $Q^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ tels que $Q^\natural\subset P^\natural$, on a :*

(1) $({}^{\omega}i_{Q^\natural}^{P^\natural})^*(\mathcal{F}(M_P^\natural,\omega))\subset\mathcal{F}(M_Q^\natural,\omega)$.

(2) $({}^{\omega}r_{P^\natural}^{Q^\natural})^*(\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(M_Q^\natural,\omega))\subset\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(M_P^\natural,\omega)$.

Démonstration. — Le point (1) — déjà utilisé dans la preuve du lemme 2 de 4.5 — résulte de la propriété de transitivité du morphisme induction parabolique.

Quant au point (2), on procède comme dans [**BDK**, 5.3], grâce aux résultats de Casselman reliant les caractères–distributions aux foncteurs restriction de Jacquet [**C**] (dans le cas tordu, voir aussi [**L2**, 5.10]). On peut supposer $P^\natural=G^\natural$. Fixons un sous–groupe d'Iwahori I de $G^\natural$ en bonne position par rapport à $(P_\circ,M_\circ)$ et tel que $\theta(I)=I$, et notons $\mathfrak{I}$ l'ensemble $\{I^n:n\geq 0\}$ des sous–groupes de congruence de $\mathfrak{I}$. Pour $n\geq 0$, posons $\mathcal{H}_n(M_Q^\natural)=\mathcal{H}_{I^n\cap M_Q}(M_Q^\natural)$. Puisque $\mathcal{H}(M_Q^\natural)=\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{H}_n(M_Q^\natural)$, il suffit de montrer que pour chaque $n\geq 0$, le sous–espace $\mathcal{H}_n^\star(M_Q^\natural)$ de $\mathcal{H}_n(M_Q^\natural)$ formé des fonctions ϕ' telles que $({}^{\omega}r_{G^\natural}^{Q^\natural})^*(\Phi_{\phi'})\in\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega)$, coïncide avec $\mathcal{H}_n(M_Q^\natural)$; où $\Phi_{\phi'}$ est l'élément de $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(M_Q^\natural,\omega)$ défini comme en 2.9 en remplaçant $G^\natural$ par $M_Q^\natural$. Posons $M=M_Q$, $U=U_Q$ et $\overline{U}=\overline{U}_Q$.

Fixons $n\geq 0$, et posons $J=I^n$ et $J_\Gamma=J\cap\Gamma$ pour tout sous–groupe fermé Γ de G. Pour $\delta\in G^\natural$, on note $\phi_\delta^J\in\mathcal{H}_J(G^\natural)$ la fonction caractéristique de la double classe $J\cdot\delta\cdot J$ divisée par $\mathrm{vol}(J\cdot\delta\cdot J,d\delta)$. Pour $\delta\in M^\natural=M_Q^\natural$, on définit de la même manière $\phi_\delta^{J_M}\in\mathcal{H}_{J_M}(M^\natural)$. Dans le cas non tordu (i.e. si $G^\natural=G$), on pose $f_g^J=\phi_g^J$ pour $g\in G$, et $f_m^{J_M}=\phi_m^{J_M}$ pour $m\in M$. Fixons un élément $a\in A=A_Q$ tel que $\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(a)$ contracte strictement U, c'est–à–dire vérifiant

$$\bigcap_{k\geq 1}\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}}(a)^k(U_J)=\{1\}.$$

Soit Π une ω–représentation admissible de $G^\natural$. Posons $V = V_\Pi$ et $\pi = \Pi^\circ$. L'espace

$$V(U) = \langle \pi(u)(v) - v : v \in V,\, u \in U\rangle$$

coïncide avec l'ensemble des $v \in V$ tels que $\int_{\Omega_v} \pi(u)(v)du = 0$ pour un sous–groupe ouvert compact Ω_v de U. Puisque Π est admissible, l'espace $V(U)\cap V^J$ est dimension finie, et il existe un sous–groupe ouvert compact Ω de U tel que $\int_\Omega \pi(u)(v)du = 0$ pour tout $v \in V(U) \cap V^J$. Quitte à remplacer Ω par un groupe plus gros, on peut supposer que J_U est contenu dans Ω. Soit $k_0 \geq 1$ un entier tel que $\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(a)^{k_0}(\Omega) \subset J_U$. Soit $\overline{\Pi} = \delta_{Q^\natural}^{\frac{1}{2}}\, {}^\omega r_{G^\natural}^{Q^\natural}$ la ω–représentation de $M^\natural$ déduite de Π par passage au quotient sur l'espace $\overline{V} = V/V(U)$. D'après la proposition 3.3 de [**C**], pour tout entier $k \geq k_0$, notant $V_a^{J,k}$ le sous–espace $\pi(f_a^J)^k(V)$ de V^J, on a :

- la projection canonique $p : V \to \overline{V}$ induit par restriction un isomorphisme de $\mathbb{C}$–espaces vectoriels $V_a^{J,k} \to \overline{V}^{J_M}$;
- $\pi(f_a^J)(V_a^{J,k}) = V_a^{J,k}$.

D'autre part, pour tout $\gamma \in M^\natural$ tel que $\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(\gamma)$ contracte strictement U, d'après la démonstration du point (1) du lemme 2 de [**L2**, 5.10], on a

$$p(\Pi(\phi_\gamma^J)(v)) = \overline{\Pi}(\gamma)(p(v)), \quad v \in V^J.$$

Pour un tel γ, et pour tout entier $k \geq k_0$, on a $\phi^J_{a^k\cdot\gamma} = (f_a^J)^{*k} * \phi_\gamma^J$, $(f_a^J)^{*k} = f_a^J * \cdots * f_a^J$ (k fois) ; de même on a et $\phi^{J_M}_{a^k\cdot\gamma} = (f_a^{J_M})^{*k} * \phi_\gamma^{J_M}$. Par suite $\Pi(\phi^J_{a^k\cdot\gamma})(V) \subset V_a^{J,k}$, et puisque $p\circ\Pi(\delta_1) = \overline{\Pi}(\delta_1)\circ p$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\Pi(\phi^J_{a^k\cdot\gamma}); V^J) &= \mathrm{tr}(\Pi(\phi^J_{a^k\cdot\gamma}); V_a^{J,k}) \\ &= \mathrm{tr}(\overline{\Pi}(a^k\cdot\gamma); \overline{V}^{J_M}) = \mathrm{tr}(\overline{\Pi}(\phi^{J_M}_{a^k\cdot\gamma}); \overline{V}^{J_M}). \end{aligned}$$

Posant $\phi = \phi^J_{a^k\cdot\gamma}$ et $\phi' = \phi^{J_M}_{a^k\cdot\gamma}$, on a $({}^\omega r_{G^\natural}^{Q^\natural})^*(\Phi_{\phi'}) = \Phi_\phi$, par conséquent $\phi' \in \mathcal{H}^\star_{J_M}(M^\natural)$.

Pour un $\delta \in M^\natural$ arbitraire, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\mathrm{Int}_{\boldsymbol{G}^\natural}(a^m\cdot\delta)$ contracte strictement U, et d'après la discussion précédente, pour tout entier $k \geq k_0$, la fonction

$$\phi^{J_M}_{a^{k+m}\cdot\delta} = (f_a^{J_M})^{*(k+m)} * \phi_\delta^{J_M}$$

est dans l'espace $\mathcal{H}^*_{J_M}(M^\natural)$. Puisque les fonctions $\phi_\delta^{J_M}$ engendrent le $\mathbb{C}$–espace vectoriel $\mathcal{H}_{J_M}(M^\natural)$, on obtient que pour toute fonction $\phi' \in \mathcal{H}_{J_M}(M^\natural)$, il existe un entier $l \geq 1$ tel que $(f_a^J)^{*l} * \phi'$ appartient à $\mathcal{H}^\star_{J_M}(M^\natural)$.

Rappelons que l'espace $\mathcal{H}_{J_M}(M)$, vu comme un $\mathcal{H}_{J_M}(M)$–module non dégénéré pour la multiplication à gauche, est un $\mathfrak{Z}(M)$–module de type fini [**BD**, cor. 3.4]. D'après 4.5, le morphisme

$$i^*_{G,Q} : \mathfrak{Z}(G) \to \mathfrak{Z}(M)$$

en fait un $\mathfrak{Z}(G)$–module de type fini. Puisque $({}^\omega r_{G^\natural}^{Q^\natural})^*$ est un morphisme de $\mathfrak{Z}(G)$–modules (4.5) et que $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(M^\natural,\omega)$ est un sous–$\mathfrak{Z}(M)$–module de $\mathcal{G}_\mathbb{C}(M^\natural,\omega)^*$ (lemme 2 de 4.5), $\mathcal{H}^\star_{J_M}(M)$ est un sous–$\mathfrak{Z}(G)$–module de $\mathcal{H}_{J_M}(M)$. Par suite il existe un entier $l_0 \geq 1$ tel que

$$(f_a^J)^{*l_0} * \phi' \in \mathcal{H}^\star_{J_M}(M), \quad \phi' \in \mathcal{H}_{J_M}(M).$$

Puisque f_a^J est inversible dans $\mathcal{H}_{J_M}(M)$, on obtient le résultat cherché :

$$\mathcal{H}^\star_{J_M}(M) = \mathcal{H}_{J_M}(M).$$

Cela achève la démonstration du point (2). □

4.7. Terme constant suivant $P^\natural$; caractères des induites paraboliques.— On a noté G^1 le sous–groupe de G engendré par les sous–groupes ouverts compacts. Il coïncide avec le sous–groupe

$$\bigcap_{\chi\in \mathrm{X}^*_F(G)} \ker|\chi|_F \subset G,$$

où (rappel) $\mathrm{X}^*_F(G)$ désigne le groupe des caractères algébriques de G qui sont définis sur F. Soit $K_\circ$ le stabilisateur dans G^1 d'un sommet spécial de l'appartement de l'immeuble (non étendu) de G associé à $A_\circ$, C'est un sous–groupe compact maximal spécial de G, *en bonne position rapport à* (P, M_P) pour tout $P \in \mathcal{P}(G)$: on a

$$G = K_\circ P, \quad P \cap K_\circ = (P\cap M_P)(U_P\cap K_\circ).$$

Notons qu'on ne suppose pas que $\theta(K_\circ) = K_\circ$ (d'ailleurs $K_\circ$ n'est en général pas θ–stable, cf. la remarque (3) de [**L2**, 5.2]).

Pour $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ et $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, on note ${}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ} \in \mathcal{H}(M_P^\natural)$ le terme constant de ϕ suivant $P^\natural$ relativement à $(K_\circ,\omega)$, défini par [**L2**, 5.9]

$${}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ}(\delta) = \delta_{P^\natural}^{1/2}(\delta)\iint_{U_P\times K_\circ}\omega(k)\phi(k^{-1}\cdot\delta\cdot uk)du_Pdk, \quad \delta\in M_P^\natural,$$

où les mesures de Haar $d\delta$, du_P, dk sur $G^\natural$, U_P, $K_\circ$ ont été choisies de manière compatible. Précisément, on peut supposer que toutes ces mesures sont celles *normalisées par* $K_\circ$, comme suit.

Définition. — Soit K un sous–groupe ouvert compact de G. Pour tout sous–groupe fermé unimodulaire H de G, on appelle *mesure de Haar sur H normalisée par K* l'unique mesure de Haar dh sur H telle que $\mathrm{vol}(H\cap K, dh) = 1$. De même, pour tout sous–espace fermé $H^\natural$ de $G^\natural$ de groupe sous–jacent H unimodulaire, on appelle *mesure de Haar sur $H^\natural$ normalisée par K* l'image de la mesure de Haar dh sur H normalisée par K par l'isomorphisme topologique $H\rightarrow H^\natural$, $h\mapsto h\cdot\delta$ pour un (i.e. pour tout) $\delta\in H^\natural$.

Hypothèse. — *On suppose désormais que toutes les mesures de Haar utilisées sont celles normalisées par $K_\circ$.*

On a donc

$$\mathrm{vol}(K_\circ\cdot\delta_1, d\delta) = \mathrm{vol}(K_\circ, dg) = \mathrm{vol}(K_\circ, dk) = 1,$$

et pour $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$, on a

$$\mathrm{vol}(M_P^\natural\cap(K_\circ\cdot\delta_1), d\delta_{M_P^\natural}) = \mathrm{vol}(M_P\cap K_\circ, dm_P) = 1$$

et

$$\mathrm{vol}(U_P\cap K_\circ, du_P) = 1.$$

Soit $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$. Pour toute ω–représentation *admissible* Σ de $M_P^\natural$ telle Σ° est admissible, on note Θ_Σ la distribution sur $M_P^\natural$ définie comme en 2.9 à l'aide de la mesure $d\delta_{M_P^\natural}$. On a la formule de descente [**L2**, 5.9, théo.] :

Proposition. — *Soit $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$. Soit Σ une ω–représentation de $M_P^\natural$ telle que Σ° est admissible, et soit $\Pi = {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)$. Pour toute fonction $\phi\in\mathcal{H}^\natural$, on a l'égalité*

$$\Theta_\Pi(\phi) = \Theta_\Sigma({}^\omega\phi_{P^\natural,K_\circ})$$

4.8. Le théorème principal sur la partie « discrète ».— Une forme linéaire Φ sur $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ est dite « discrète » si elle est nulle sur $\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega)$. On note $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)^*$ l'espace des formes linéaires discrètes sur $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$, et l'on pose

$$\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}(G^\natural,\omega)\cap\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)^*,$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega)\cap\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)^*.$$

Une fonction $\phi\in\mathcal{H}^\natural$ est dite « ω–cuspidale » si pour tout $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)\smallsetminus\{G^\natural\}$, l'image de $\phi_{P^\natural}^{K_\circ,\omega}\in\mathcal{H}(M_P^\natural)$ dans $\overline{\mathcal{H}}(M_P^\natural,\omega)$ est nulle ; où (rappel)

$$\overline{\mathcal{H}}(M_P^\natural,\omega)=\mathcal{H}(M_P^\natural)/[\mathcal{H}(M_P^\natural),\mathcal{H}(M_P)]_\omega.$$

On note $\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$ le sous–espace de $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural,\omega)$ engendré par les images dans $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural,\omega)$ des fonctions ω–cuspidales.

Théorème. — *L'application $\mathcal{H}(G^\natural)\rightarrow\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$, $\phi\mapsto\Phi_\phi$ induit par restriction un isomorphisme de $\mathbb{C}$–espaces vectoriels*

$$\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)\rightarrow\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega).$$

D'après la proposition de 4.7, la transforméee de Fourier $\mathcal{H}^\natural\rightarrow\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$, $\phi\mapsto\Phi_\phi$ induit bien une application $\mathbb{C}$–linéaire

$$\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)\rightarrow\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega).$$

Remarque. — Si $G=M_\circ$, c'est–à–dire si G est compact modulo son centre, alors on a $\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)=\overline{\mathcal{H}}(G^\natural,\omega)$ et $\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$; en ce cas le théorème ci–dessus coïncide avec le théorème principal (3.1). En général, si le théorème de 3.1 est vrai pour tous les sous–espaces tordus $M_P^\natural$, $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)\smallsetminus\{G^\natural\}$, alors d'après la proposition de 4.7, une fonction $\phi\in\mathcal{H}^\natural$ est ω–cuspidale si et seulement si elle annule toutes les traces des représentations ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)$, $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)\smallsetminus\{G^\natural\}$, $\Sigma\in\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural,\omega)$. On en déduit que si le théorème de 3.1 est vrai en général — donc en particulier pour tous les espaces tordus $M_P^\natural$, $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ —, alors le théorème ci–dessus l'est aussi. ■

4.9. Réduction du théorème principal (3.1) au théorème de 4.8.— Supposons démontré le théorème de 4.8 (en général, c'est–à–dire pour tout $G^\natural$) et déduisons–en le théorème de 3.1. D'après la remarque de 4.8, le théorème de 3.1 est vrai pour $G^\natural=M_\circ^\natural$. Par récurrence sur la dimension de M_P pour $P\in\mathcal{P}(G^\natural)$, on peut donc supposer que le théorème de 3.1 est vrai pour tout sous–espace $M_P^\natural$, $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)\smallsetminus\{G^\natural\}$.

Commençons par le théorème de Paley–Wiener, c'est–à–dire la surjectivité de l'application $\mathcal{H}^\natural\rightarrow\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$, $\phi\mapsto\Phi_\phi$. D'après la proposition de 4.4 pour $d=d(G)$, il existe des nombres rationnels $\lambda(P^\natural)$ pour $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)\smallsetminus\{G^\natural\}$ tels que le $\mathbb{C}$–endomorphisme de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$

$$\boldsymbol{A}_d=\mathrm{id}+\sum_{P^\natural\neq G^\natural}\lambda(P^\natural)\,{}^\omega T_{P^\natural,\mathbb{C}}$$

vérifie

$$\ker\boldsymbol{A}_d=\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega),\quad \boldsymbol{A}_d\circ\boldsymbol{A}_d=\boldsymbol{A}_d.$$

Le morphisme adjoint

$$\boldsymbol{A}_d^*=\mathrm{id}+\sum_{P^\natural\neq G^\natural}\lambda(P^\natural)({}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural})^*\circ({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*$$

envoie $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$ dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)^*$. Soit $\Phi\in\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$. Posons $\Phi'=\boldsymbol{A}_d^*(\Phi)\in\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)^*$. Pour $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)\smallsetminus\{G^\natural\}$, d'après la proposition de 4.6 et le théorème de Paley–Wiener pour $M_P^\natural$, on a

$$({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(\Phi)\in\mathcal{F}(M_P^\natural,\omega)=\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(M_P^\natural,\omega),$$

Ensuite, d'après le point (2) de la proposition de 4.6, on a

$$({}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural})^*\circ({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(\Phi)\in\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega)\subset\mathcal{F}(G^\natural,\omega).$$

Par conséquent Φ' appartient à $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)^*\cap\mathcal{F}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$, et d'après le théorème de 4.8, il existe une fonction ω–cuspidale $\phi'\in\mathcal{H}^\natural$ telle que $\Phi'=\Phi_{\phi'}$. D'autre part, on vient de voir qu'il existe une fonction $\phi''\in\mathcal{H}^\natural$ telle que

$$({}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural})^*\circ({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(\Phi)=\Phi_{\phi''}.$$

On a donc

$$\Phi=\Phi_{\phi'}-\Phi_{\phi''}=\Phi_{\phi'-\phi''}\in\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega).$$

Passons au théorème de densité spectrale, c'est–à–dire à l'injectivité de l'application $\overline{\mathcal{H}}_\omega^\natural\to\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$, $\phi\mapsto\Phi_\phi$. Soit $\phi\in\mathcal{H}^\natural$ une fonction telle que $\Phi_\phi=0$. Pour $P^\natural\in\mathcal{P}(G^\natural)$ tel que $P^\natural\neq G^\natural$, d'après la proposition de 4.7 et le théorème de densité spectrale pour $M_P^\natural$, le terme constant $\phi_{P^\natural}=\phi_{P^\natural}^{K_\circ,\omega}$ appartient au sous–espace $[\mathcal{H}(M_P^\natural),\mathcal{H}(M_P)]_\omega$ de $\mathcal{H}(M_P^\natural)$. Par conséquent la fonction ϕ est ω–cuspidale, et d'après le théorème de 4.8, elle est dans $[\mathcal{H}^\natural,\mathcal{H}]_\omega$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — D'après ce qui précède, par récurrence sur la dimension de G, la surjectivité de l'application du théorème de 3.1 est impliquée par la surjectivité de celle du théorème de 4.8 ; idem pour l'injectivité. Pour démontrer le théorème principal (3.1), il suffit donc de démontrer sa variante sur la partie discrète (4.8). ■

5. Le théorème de Paley–Wiener sur la partie discrète

D'après 4.9, le théorème de Paley–Wiener est impliqué par la surjectivité de l'application du théorème de 4.8. C'est cette dernière que l'on établit dans cette section 5.

5.1. Support cuspidal des représentations discrètes. — Une ω–représentation G–irréductible Π de $G^\natural$ est dite « discrète » si son image dans $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$ n'est pas nulle ; où (rappel) $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)=\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)/\mathcal{G}_{\mathbb{C},\mathrm{ind}}(G^\natural,\omega)$. On note $\mathrm{Irr}_0^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$ le sous–ensemble de $\mathrm{Irr}_0(G^\natural,\omega)$ formé des ω–représentations discrètes. Il s'identifie à un sous–ensemble de $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$, que l'on note $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$.

Lemme. — *Soit Π une ω–représentation G–irréductible discrète de $G^\natural$. Il existe une ω_{u}-représentation G–irréductible tempérée Π' de $G^\natural$ et un élément Ψ de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^{|\omega|}(G^\natural)$ tels que $\theta_{G^\natural}(\Pi)=\theta_{G^\natural}(\Psi\cdot\Pi')$.*

Démonstration. — Soit $(P^\natural,\Sigma,\Xi)$ un triplet de Langlands associé à Π. Posons $\sigma=\Sigma^\circ$, $\xi=\Xi^\circ$, et soit $(M_{P'},\sigma')$ une paire cuspidale standard de G telle que $P'\subset P$ et $\xi\cdot\sigma$ est isomorphe à un sous-quotient (irréductible) de l'induite parabolique $i_{P'}^P(\sigma')$. D'après la démonstration du lemme 1 de 2.13, on a une décomposition

$$\Pi\equiv\sum_{i=1}^m\widetilde{\Pi}_{\mu_i}\quad(\mathrm{mod}\ \mathcal{G}_{>0}(G^\natural,\omega))$$

où les μ_i sont des triplets de Langlands pour $(G^\natural,\omega)$ tels que $\theta_G(\Pi^\circ_{\mu_i})=[M_{P'},\sigma']$. Rappelons que si $\mu=(P^\natural,\Sigma,\Xi)$ est un triplet de Langlands pour $(G^\natural,\omega)$, on a posé $\widetilde{\Pi}_\mu={}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\cdot\Pi)$. Puisque Π est discrète, l'un au moins de ces triplets, disons μ_{i_0} est de la forme $(G^\natural,\Pi',\Psi)$, et l'on a $\theta_{G^\natural}(\Psi\cdot\Pi')=\theta_G(\Pi^\circ_{\mu_{i_0}})=\theta_{G^\natural}(\Pi)$. □

5.2. Un résultat de finitude. — Pour $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)$, on note $\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$ le sous–ensemble de $\Theta_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$ formé des $\theta_{G^\natural}(\Pi)$ pour un $\Pi\in\mathrm{Irr}_0^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$.

Proposition. — *Soit $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)$. L'ensemble $\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$, s'il est non vide, est union finie de $\mathfrak{P}(G^\natural)$–orbites.*

Démonstration. — On reprend la méthode de **[BDK]** en l'adaptant au cas tordu, comme le fait Flicker dans **[F]**. Cette méthode consiste à vérifier que $\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$ est une partie *constructible* de $\Theta(\mathfrak{s})$, c'est-à-dire une union finie de parties localement fermés (pour la topologie de Zariski). Admettons pour l'instant ce résultat — il sera démontré en 5.5 — et déduisons–en la proposition.

Notons ω^+ le caractère $\overline{\omega^{-1}}$ de G. L'application $\Pi\mapsto\Pi^+=\overline{\check{\Pi}}$ est une bijection de $\mathrm{Irr}_0(G^\natural,\omega)$ sur $\mathrm{Irr}_0(G^\natural,\omega^+)$, vérifiant $(\Pi^+)^+=\Pi$. Elle commute au foncteur d'oubli $\Pi\mapsto\Pi^\circ$: en notant $\pi\mapsto\pi^+$ l'involution de $\mathrm{Irr}(G)$ définie de la même manière, on a $(\Pi^+)^\circ=(\Pi^\circ)^+$. De plus, l'involution $\pi\mapsto\pi^+$ de $\mathrm{Irr}(G)$ induit par linéarité une involution de $\mathcal{G}(G)$, qui commute au morphisme induction parabolique i_P^G, $P\in\mathcal{P}(G)$. D'où une involution « + » sur la variété algébrique complexe $\Theta(\mathfrak{s})$, qui commute à l'application support cuspidal θ_G : si $\theta_G(\pi)=[M,\rho]\in\Theta(\mathfrak{s})$ pour une paire cuspidale standard (M,ρ) de G, on a

$$\theta_G(\pi^+)=[M,\rho^+]=\theta_G(\pi)^+.$$

On a aussi une involution $\psi\mapsto\psi^+$ sur $\mathfrak{P}(M)$, donnée par $\psi^+=\overline{\psi^{-1}}$. Les involutions + sur $\mathfrak{P}(M)$ et $\Theta(\mathfrak{s})$ sont anti–algébriques, et compatibles : pour $[M,\rho]\in\Theta(\mathfrak{s})$ et $\psi\in\mathfrak{P}(M)$, on a

$$(\psi\cdot[M,\rho])^+=[M,(\psi\rho)^+]=\psi^+\cdot[M,\rho]^+.$$

Supposons que $\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$ est non vide. D'après le lemme de 5.1, tout élément x de $\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$ est de la forme $x=\theta_G(\psi\Pi'^\circ)$ pour une ω_{u}–représentation G–irréductible tempérée Π' de $G^\natural$ et un élément ψ de $\mathfrak{P}(G^\natural)$. Puisque $\pi'=\Pi'^\circ$ est tempérée, donc en particulier unitaire, on a $\pi'^+=\pi'$ et

$$x^+=\theta_G(\psi^+\pi')=\psi^+\psi^{-1}\cdot x$$

appartient à $\mathfrak{P}(G^\natural)\cdot x$. Ici $\mathfrak{P}(G^\natural)$ $(=\mathfrak{P}(G)^\theta)$ opère sur $\Theta(\mathfrak{s})$ via la restriction des caractères de G à M. L'involution + sur $\Theta(\mathfrak{s})$ induit par passage au quotient une involution anti–algébrique sur la variété algébrique quotient $\mathfrak{X}=\Theta(\mathfrak{s})/\mathfrak{P}(G^\natural)$, que l'on note encore « + ». D'après le calcul ci–dessus, cette involution + sur $\mathfrak{X}$ fixe les points du sous–ensemble $\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})/\mathfrak{P}(G^\natural)$. Ce dernier est constructible, donc fini, ce qu'il fallait démontrer. □

5.3. Décomposition des fonctions régulières. — On est donc ramené à vérifier que pour $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)$, l'ensemble $\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$ est une partie constructible de $\Theta(\mathfrak{s})$. Posons $\Theta=\Theta(\mathfrak{s})$ et $\Theta'=\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$. Comme dans **[BDK**, 5.1], il suffit de montrer que la paire $\Theta'\subset\Theta$ satisfait au critère suivant (loc. cit., p. 187) :

(*) Pour toute sous-variété localement fermée $\mathfrak{X}$ de Θ, il existe un morphisme dominant étale $\phi:\mathfrak{Y}\to\mathfrak{X}$ tel que, notant $(\mathfrak{X}\cap\Theta')^{\mathrm{c}}$ le complémentaire de $\mathfrak{X}\cap\Theta'$ dans $\mathfrak{X}$, l'ensemble $\phi^{-1}((\mathfrak{X}\cap\Theta')^{\mathrm{c}})$ est vide ou égal à $\mathfrak{Y}$ tout entier.

Définition. — Soit $\mathfrak{X}$ une variété algébrique affine complexe, d'anneau de fonctions régulières $B = \mathbb{C}[\mathfrak{X}]$. Une application $\nu : \mathfrak{X} \to \mathcal{G}(G^\natural, \omega)$ est dite *régulière* si elle est de la forme $x \mapsto \Pi_x$ pour un $(G^\natural, \omega, B)$-module admissible (Π, V), où Π_x désigne la (semisimplifiée de la) localisation de Π en x — cf. 2.21. Une application régulière $\nu : \mathfrak{X} \to \mathcal{G}(G^\natural, \omega)$ est dite *irréductible* si $\nu(\mathfrak{X}) \subset \mathrm{Irr}(G^\natural, \omega)$, et *$G$–irréductible* si $\nu(\mathfrak{X}) \subset \mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$. Deux applications régulières (irréductibles) ν, $\nu' : \mathfrak{X} \to \mathrm{Irr}(G^\natural, \omega)$ sont dites *disjointes* si $\nu(x) \neq \nu'(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$, et elles sont dites $\mathbb{C}^\times$–disjointes si $\nu(x) \neq \lambda \cdot \nu'(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Remarque. — Pour chaque $x \in \mathfrak{X}$, la localisation Π_x de Π en x est une ω–représentation de $G^\natural$ de longueur finie, et puisque la représentation Π_x° de G sous–jacente est elle aussi de longueur finie, pour tout sous–quotient irréductible Π' de Π_x, on a $s(\Pi') < +\infty$. Choisissons une suite de Jordan-Hölder de Π :

$$0 = \Pi_{x,0} \subset \Pi_{x,1} \subset \cdots \subset \Pi_{x,n} = \Pi_x.$$

Pour $i = 1, \ldots, n$, $\Pi_{x,i}$ est une sous–ω–représentation de Π, et le sous–quotient $\Pi_{x,i}/\Pi_{x,i-1}$ de Π_x est irréductible. La semisimplifiée de Π_x est par définition la somme sur i des classes d'isomorphisme des $\Pi_{x,i}/\Pi_{x,i-1}$. ■

Le lemme suivant est une variante tordue des constructions de loc. cit. (step 1 – step 2). On aurait pu se contenter de la version non tordue (cf. la proposition de 5.4), mais comme ces constructions sont au coeur du raisonnement, et qu'il nous faut de toutes façons les reprendre en détail, on préfère le faire dans le cadre tordu qui nous intéresse ici.

Lemme. — *Soit $\nu : \mathfrak{X} \to \mathcal{G}(G^\natural, \omega)$ une application régulière. Il existe un morphisme dominant étale $\phi : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, des applications régulières $\mu_1, \ldots, \mu_m : \mathfrak{Y} \to \mathrm{Irr}(G^\natural, \omega)$ deux–à–deux disjointes, et des entiers $a_1, \ldots, a_m > 0$ tels que $\nu \circ \phi = \sum_{i=1}^m a_i \mu_i$.*

Démonstration. — Posons $B = \mathbb{C}[\mathfrak{X}]$, et soit (Π, V) un $(G^\natural, \omega, B)$–module admissible tel que $\nu(x) = \Pi_x$. Choisissons un sous–groupe ouvert compact J de G tel que V^J engendre V comme $\mathcal{H}$–module, i.e. tel que $\Pi^\circ(G)(V^J) = V$. D'après 2.19, on peut supposer que J est « bon », $\theta(J) = J$ et $\omega|_J$. C'est donc un élément de $\boldsymbol{J}_{G^\natural,\omega}(G)$, et $J^\natural = J \cdot \delta_1$ est un élement de $\boldsymbol{J}(G^\natural, \omega)$. D'après 2.20, l'étude du $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$–module non dégénéré V se ramène à celle du $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$–module non dégénéré $V^J = V^{J^\natural}$. En particulier, tout sous–quotient irréductible Π' de Π vérifie $\Pi'^{J^\natural} \neq 0$.

Quitte à remplacer la variété $\mathfrak{X}$ par l'une de ses composantes irréductibles, on peut la supposer irréductible. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{X})$ le corps des fractions de B, et soit $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$. Le $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$–module V^J est aussi un B–module de type fini. Par conséquent $W = \mathbb{K} \otimes_B V^J$ est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie, $\overline{W} = \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} W$ est un $\overline{\mathbb{K}}$–espace vectoriel de dimension finie, et il existe une suite de $\overline{\mathbb{K}}$–espaces vectoriels

$$0 = \overline{W}_0 \subset \overline{W}_1 \subset \cdots \subset \overline{W}_n = \overline{W}$$

telle que pour $i = 1, \ldots, n$:

- $\overline{W}_i$ est un sous–$(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$–module de $\overline{W}$;
- $\overline{W}_i/\overline{W}_{i-1}$ est un $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$–module simple sur $\overline{\mathbb{K}}$.

De plus, il existe une sous–extension finie $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$ de $\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}$, un sous–$\mathbb{K}'$–espace vectoriel W' de $\overline{W}$ de dimension finie, et une suite de $\mathbb{K}'$–espaces vectoriels

$$0 = W'_0 \subset W'_1 \subset \cdots \subset W'_n = W'$$

telle que pour $i = 1, \ldots, n$:

- W'_i est un sous–$(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$–module de W' ;

– $\overline{W}_i = \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}'} W'_i$.

Ainsi pour $i = 1, \dots, n$, le quotient $X'_i = W'_i/W'_{i-1}$ est un $(\mathcal{H}^\natural_J, \omega)$–module simple sur $\mathbb{K}'$. D'après la remarque 2 de 2.8, X'_i est un $\mathcal{H}_J$–module semisimple sur $\mathbb{K}'$. Précisément, on choisit un sous–$\mathcal{H}_J$–module simple (sur $\mathbb{K}'$) $X'_{i,0}$ de X'_i, et pour chaque entier $k \geq 1$, on note $X'_{i,k}$ le sous–$\mathcal{H}_J$–module simple de X'_i défini par $X'_{i,k} = e_{J^\natural} \cdot X'_{i,k-1}$. Alors il existe un plus petit entier entier $s = s(i) \geq 1$ tel que

$$X'_i = X'_{i,0} \oplus X'_{i,1} \oplus \cdots \oplus X'_{i,s-1}.$$

D'après le théorème de Burnside, $\mathcal{H}_J$ engendre l'espace $\mathrm{End}_{\mathbb{K}'}(X'_{i,k})$ sur $\mathbb{K}'$.

Le corps $\mathbb{K}'$ est une extension finie séparable de $\mathbb{K}$, par suite il existe une variété algébrique affine irréductible $\mathfrak{Y}'$ étale sur $\mathfrak{X}$ (c'est–à–dire un morphisme dominant étale $\mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}$) telle que $\mathbb{K}' = \mathbb{C}(\mathfrak{Y}')$. Notons $B' = \mathbb{C}[\mathfrak{Y}']$ l'algèbre affine de $\mathfrak{Y}'$.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Choisissons une $\mathbb{K}'$–base de $X'_{i,0}$, et notons $Y'_{i,0}$ le sous–B'–module de $X'_{i,0}$ engendré par cette base. On a donc $\mathbb{K}' \otimes_{B'} Y'_{i,0} = X'_{i,0}$. Rappelons que $\mathcal{H}_J$ est une $\mathbb{C}$–algèbre de type fini. Puisque

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}'}(X'_{i,0}) = \mathbb{K}' \otimes_{B'} \mathrm{End}_{B'}(Y'_{i,0})$$

et que $\mathcal{H}_J$ engendre $\mathrm{End}_{\mathbb{K}'}(X'_{i,0})$ sur $\mathbb{K}'$, il existe un ouvert dense $\mathfrak{Y}_i$ de $\mathfrak{Y}'$ (ce qui revient à inverser certains éléments de B') tel que, notant $B_i = \mathbb{C}[\mathfrak{Y}_i]$ l'algèbre affine de $\mathfrak{Y}_i$, on a :

– $Y_{i,0} = B_i \otimes_{B'} Y'_{i,0}$ est libre (de type fini) sur B_i ;
– $\mathcal{H}_J \subset \mathrm{End}_{B_i}(Y_{i,0})$;
– $\mathcal{H}_J$ engendre $\mathrm{End}_{B_i}(Y_{i,0})$ sur B_i.

Pour $k = 1, \dots, s(i) - 1$, posons $Y_{i,k} = e_{J^\natural} \cdot Y_{i,0}$. C'est un sous–$(\mathcal{H}_J \otimes_{\mathbb{C}} B_i)$–module de $X'_{i,k}$, qui vérifie $\mathbb{K}' \otimes_{B_i} Y_{i,k} = X'_{i,k}$. On obtient ainsi un sous–$(\mathcal{H}^\natural_J, \omega)$–module (non dégénéré)

$$Y_i = Y_{i,0} \oplus \cdots \oplus Y_{i,s(i)-1}$$

de X'_i, qui est aussi un B_i–module libre de type fini, tel que $\mathcal{H}^\natural_J$ engendre $\mathrm{End}_{B_i}(Y_i)$ sur B_i. Pour $y \in \mathfrak{Y}_i$, le localisé $(Y_{i,0})_y$ de $Y_{i,0}$ en y est un $\mathcal{H}_J$–module simple, et le localisé $(Y_i)_y$ de Y_i en y est un $(\mathcal{H}^\natural_J, \omega)$–module simple. Notons Π_i la ω–représentation de $G^\natural$ d'espace $\mathcal{H} * e_J \otimes_{\mathcal{H}_J} Y_i$ correspondant au $(\mathcal{H}^\natural_J, \omega)$–module non dégénéré Y_i (2.20). C'est un $(G^\natural, \omega, B_i)$–module admissible tel que pour $y \in \mathfrak{Y}_i$, la localisation $\Pi_{i,y}$ de Π_i en y est irréductible (elle est G–irréductible si et seulement si $s(i) = 1$).

Notons $\mathfrak{Y}$ l'intersection des $\mathfrak{Y}_i$, $i = 1, \dots, n$. C'est un ouvert dense de $\mathfrak{Y}'$, étale sur $\mathfrak{X}$. La composition des morphismes $\mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{Y}'$ est un morphisme dominant étale $\nu : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$. Pour $y \in \mathfrak{Y}$, on a l'égalité dans $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$:

$$\Pi_{\nu(y)} = \sum_{i=1}^{n} \Pi_{i,y}.$$

En regroupant les indices i tels que les fonctions $\mathfrak{Y} \to \mathrm{Irr}(G^\natural, \omega)$, $y \mapsto \Pi_{i,x}$ sont égales, l'égalité ci–dessus s'écrit

$$\Pi_{\nu(y)} = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu_i(y)$$

pour des applications régulières $\mu_i : \mathfrak{Y} \to \mathrm{Irr}(G^\natural, \omega)$ deux–à–deux distinctes et des entiers $a_1, \dots, a_m > 0$. Pour $i \neq j$, l'ensemble des $y \in \mathfrak{Y}$ tels que $\mu_i(y) = \mu_j(y)$ est fermé dans $\mathfrak{Y}$ pour la topologie de Zariski. Quitte à remplacer $\mathfrak{Y}$ par un ouvert plus petit, on peut supposer les fonctions μ_i deux–à–deux disjointes. Cela achève la démonstration du lemme. $\square$

5.4. Une conséquence du lemme de décomposition. — La définition de 5.3 s'applique bien sûr au cas non tordu : si $\mathfrak{X}$ est une variété algébrique affine complexe, d'anneau de fonctions régulières $B = \mathbb{C}[\mathfrak{X}]$, une application $\nu : \mathfrak{X} \to \mathcal{G}(G)$ est dite *régulière* si elle est de la forme $x \mapsto \pi_x$ pour un (G, B)–module admissible (π, V), où π_x est la (semisimplifiée de la) localisation de π en x. Toute application régulière $\nu : \mathfrak{X} \to \mathcal{G}(G^\natural, \omega)$ induit une application régulière $\nu^\circ : \mathfrak{X} \to \mathcal{G}(G)$, donnée par $\nu^\circ(x) = \nu(x)^\circ$, $x \in \mathfrak{X}$. Notons que deux application régulières (G–irréductibles) ν, $\nu' : \mathfrak{X} \to \mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ sont $\mathbb{C}^\times$–disjointes si et seulement si les applications régulières sous–jacentes ν°, $\nu'^\circ : \mathfrak{X} \to \mathrm{Irr}(G)$ sont disjointes.

Rappelons que le foncteur d'oubli $\Pi \mapsto \Pi^\circ$ induit une application injective

$$\mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)/\mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathrm{Irr}(G)$$

d'image le sous–ensemble $\mathrm{Irr}_1(G) = \mathrm{Irr}_{G^\natural,\omega}(G)$ de $\mathrm{Irr}(G)$ formé des π tels que $\pi(1) = \pi$. Soit $\mathcal{G}_1(G)$ le sous-groupe de $\mathcal{G}(G)$ engendré par $\mathrm{Irr}_1(G)$ — c'est aussi un quotient de $\mathcal{G}(G)$ — et

$$q_1 : \mathcal{G}(G) \to \mathcal{G}_1(G)$$

la projection canonique. Par définition, le foncteur d'oubli $\Pi \mapsto \Pi^\circ$ induit un morphisme de groupes surjectif $\mathcal{G}_0(G^\natural, \omega) \to \mathcal{G}_1(G)$, de noyau le sous–goupe de $\mathcal{G}_0(G^\natural, \omega)$ engendré par les $\Pi - \lambda \cdot \Pi$ pour $\Pi \in \mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Proposition. — *Soit $\nu : \mathfrak{X} \to \mathcal{G}(G)$ une application régulière. Il existe un morphisme dominant étale $\phi : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, des applications régulières $\mu_1, \ldots, \mu_m : \mathfrak{Y} \to \mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ deux–à–deux $\mathbb{C}^\times$–disjointes, et des entiers $a_1, \ldots, a_m > 0$, tels que $q_1 \circ \nu \circ \phi = \sum_{i=1}^m a_i \mu_i^\circ$.*

Démonstration. — Soit $B = \mathbb{C}[\mathfrak{X}]$. Par définition l'application ν est de la forme $x \mapsto \pi_x$ pour un (G, B)–module admissible (π, V). On choisit un bon sous–groupe ouvert compact J de G comme dans la démonstration du lemme de 5.3, i.e. tel que V^J engendre V comme $\mathcal{H}$–module, J est en « bon », $\theta(J) = J$ et $\omega|_J = 1$. On peut aussi supposer $\mathfrak{X}$ irréductible. D'après le lemme de 5.3, il existe un morphisme dominant étale $\phi' : \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}$, des applications régulières $\mu'_1, \ldots, \mu'_n : \mathfrak{Y}' \to \mathrm{Irr}(G)$ deux–à–deux disjointes, et des entiers $a'_1, \ldots, a'_n > 0$, tels que $\nu \circ \phi' = \sum_{i=1}^n a'_i \mu'_i$. Précisément, $\mathfrak{Y}'$ est une variété algébrique affine complexe irréductible, d'anneau de fonctions régulières $B' = \mathbb{C}[\mathfrak{Y}']$, et pour $i = 1, \ldots, n$, on a $\mu'_i(y) = \pi_{i,y}$ pour un (G, B')-module admissible (π_i, V_i) tel que :

– $W_i = (V_i)^J$ engendre V_i comme G-module,
– $\mathcal{H}_J$ engendre $\mathrm{End}_{B'}(W_i)$ comme B'-module.

Pour chaque $y \in \mathfrak{Y}'$, le $\mathcal{H}_J$-module $W_{i,y} = (V_{i,y})^J$ est simple, et pour $i \neq j$, les $\mathcal{H}_J$–modules simples $W_{i,y}$ et $W_{j,y}$ sont non isomorphes.

Pour $i = 1, \ldots, n$, notons $(\pi_i(1), V_i(1))$ le (G, B')–module admissible défini par $V_i(1) = V_i$ et $\pi_i(1) = \omega^{-1}(\pi_i)^\theta$. Pour $y \in \mathfrak{Y}'$, la localisation $\pi_i(1)_y$ de $\pi_i(1)$ en y est donnée par

$$\pi_i(1)_y = \omega^{-1}(\pi_{i,y})^\theta = \pi_{i,y}(1).$$

L'application

$$\mu'_i(1) : \mathfrak{Y}' \to \mathcal{G}(G),\ y \mapsto \pi_i(1)_y$$

est encore régulière. Notons $W_i(1)$ le $(\mathcal{H}_J \otimes_{\mathbb{C}} B')$–module $V_i(1)^J = (V_i)^J$ déduit de $\pi_i(1)$ par passage aux points fixes sous J. Soit $\mathbb{K}' = \mathbb{C}(\mathfrak{Y}')$ le corps des fractions de B'. Pour $i = 1, \ldots, n$, les $\mathcal{H}_J$-modules $W_{i,\mathbb{K}'} = \mathbb{K}' \otimes_{B'} W_i$ et $\mathbb{K}' \otimes_{B'} W_i(1)$ sont simples (sur $\mathbb{K}'$), et l'on note I_0 le sous–ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ formé des indices i tels qu'ils sont isomorphes. D'après [**L2**, 8.2], pour $i \in I_0$, il existe un $\mathbb{K}'$-automorphisme $A_{i,\mathbb{K}'}$ de $W_{i,\mathbb{K}'}$ tel que

$$A_{i,\mathbb{K}'}(\omega f \cdot v) = {}^\theta f \cdot A_{i,\mathbb{K}'}(v), \quad f \in \mathcal{H}_J,\ v \in W_{i,\mathbb{K}'},$$

où l'on a posé ${}^\theta f = f \circ \theta^{-1}$. Puisque $W_{i,\mathbb{K}'}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}'$, il existe un ouvert $\mathfrak{Y}_i$ de $\mathfrak{Y}'$ tel que $A_{i,\mathbb{K}'}$ induit par restriction un $\mathbb{C}[\mathfrak{Y}_i]$–automorphisme de W_i, disons A_i. Cela munit W_i d'une structure de $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$–module non dégénéré, l'action de $\mathcal{H}_J^\natural$ commutant à celle de $\mathbb{C}[\mathfrak{Y}_i]$. Soit Π_i la ω–représentation de $G^\natural$ d'espace $V_i = (\mathcal{H} * e_J) \otimes_{\mathcal{H}_J} W_i$ correspondant au $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$–module W_i (2.20). Notons que A_i coïncide avec la restriction de $\Pi_i(\delta_1)$ à $W_i = (V_i)^J$. Par construction, (Π_i, V_i) est un $(G^\natural, \omega, \mathbb{C}[\mathfrak{Y}_i])$–module admissible tel que pour $y \in \mathfrak{Y}_i$, la localisation $\Pi_{i,y}$ de Π_i en y est une ω–représentation G–irréductible de $G^\natural$.

L'intersection $\mathfrak{Y} = \bigcap_{i \in I_0} \mathfrak{Y}_i$ est un ouvert (dense) de $\mathfrak{Y}'$, et pour $i \in I_0$, l'application régulière

$$\mathfrak{Y} \to \mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega),\ y \mapsto \mu_i(y) = \Pi_{i,y}$$

vérifie $\mu_i^\circ(y) = \mu_i'(y)$, où $\mu_i' : \mathfrak{Y}' \to \mathrm{Irr}(G)$ est l'application régulière introduite en début de démonstration. La composition des morphismes $\phi' : \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{Y}'$ est un morphisme dominant étale $\phi : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, et pour $y \in \mathfrak{Y}$, on a

$$q_1 \circ \nu \circ \phi(y) = \sum_{i \in I_0} a_i' \mu_i'(y).$$

Puisque par construction les applications μ_i (pour $i \in I_0$) sont deux–à–deux $\mathbb{C}^\times$–disjointes, la proposition est démontrée. □

Corollaire. — *Soit $\nu_1, \ldots, \nu_m : \mathfrak{X} \to \mathcal{G}(G)$ des applications régulières, et $\mu_1, \ldots, \mu_n : \mathfrak{X} \to \mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ des applications régulières deux–à–deux $\mathbb{C}^\times$–disjointes. Soit $\mathfrak{X}'$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{X}$ tels que $\{\mu_1^\circ(x), \ldots, \mu_n^\circ(x)\}$ est contenu dans le sous–groupe de $\mathcal{G}_1(G)$ engendré par $q_1 \circ \nu_1(x), \ldots, q_1 \circ \nu_m(x)$. Il existe un morphisme dominant étale $\phi : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ tel que $\phi^{-1}(\mathfrak{X}')$ est soit vide soit égal à $\mathfrak{Y}$ tout entier.*

Démonstration. — D'après la proposition, il existe un morphisme dominant étale $\phi : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ et des applications régulières $\lambda_1, \ldots, \lambda_s : \mathfrak{Y} \to \mathrm{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ tels que pour $i = 1, \ldots, m$, l'application $q_1 \circ \nu_i \circ \phi : \mathfrak{Y} \to \mathcal{G}_1(G)$ se décompose en

$$q_1 \circ \nu_i \circ \phi = \sum_{j=1}^{s} a_{i,j} \lambda_j^\circ$$

pour des entiers $a_{i,j} > 0$. Quitte à remplacer $\mathfrak{Y}$ par un ouvert plus petit, on peut supposer que les applications $\lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_s^\circ : \mathfrak{Y} \to \mathrm{Irr}_{G^\natural,\omega}(G)$ sont deux–à–deux disjointes, et que pour pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, les applications $\mu_k^\circ \circ \phi$ et λ_j° sont soit égales soit disjointes. Supposons $\phi^{-1}(\mathfrak{X}') \neq \emptyset$ et soit $y \in \phi^{-1}(\mathfrak{X}')$. On a forcément $n \leq s$ et quitte à réordonner les λ_j, on peut supposer que $\mu_k^\circ \circ \phi = \lambda_k^\circ$ $(k = 1, \ldots, n)$. Par hypothèse, pour $k = 1, \ldots, n$, il existe des entiers $b_{k,i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ tels que

$$\mu_k^\circ \circ \phi(y) = \sum_{i=1}^{m} b_{k,i} \sum_{j=1}^{s} a_{i,j} \lambda_j^\circ(y).$$

Pour $k = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, s$, on a donc

$$\sum_{i=1}^{m} b_{k,i} a_{i,j} = \delta_{k,j}.$$

Par suite $\phi^{-1}(\mathfrak{X}') = \mathfrak{Y}$ et le lemme est démontré. □

5.5. La partie $\Theta' = \Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$ de $\Theta = \Theta(\mathfrak{s})$ est constructible. — Montrons que la paire $\Theta' \subset \Theta$ satisfait au critère $(*)$ de 5.3. On peut supposer que Θ' est non vide. Soit (M_P,ρ) une paire cuspidale standard de G telle que $[M_P,\rho] \in \Theta$. Pour $Q \in \mathcal{P}(G)$ tel que $P \subset Q$, notons $\eta_Q : \mathfrak{P}(M_P) \to \mathcal{G}(M_Q)$ l'application régulière définie par

$$\eta_Q(\psi) = i_P^Q(\psi\rho).$$

Pour $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$, on définit comme en 5.3 la projection canonique $q_{Q,1} : \mathcal{G}(M_Q) \to \mathcal{G}_1(M_Q)$, où $\mathcal{G}_1(M_Q)$ est le sous–groupe de $\mathcal{G}(M_Q)$ engendré par les représentations $\sigma \in \mathrm{Irr}(M_Q)$ telles que $\omega^{-1}\sigma^\theta = \sigma$.

Soit $\mathfrak{X}$ une sous–variété localement fermée de Θ. Puisque le morphisme

$$\mathfrak{P}(M_P) \to \Theta,\ \psi \mapsto [M_P,\psi\rho]$$

est dominant (et même fini) étale, il existe une sous–variété $\widetilde{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{P}(M_P)$ telle que l'ensemble $\{[M_P,\psi\rho] : \psi \in \mathfrak{X}'\}$ est contenu dans $\mathfrak{X}$ et le morphisme

$$\widetilde{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X},\ \psi \mapsto [M_P,\psi\rho]$$

est dominant étale. D'après la proposition de 5.4, il existe un morphisme dominant étale $\tilde{\phi} : \mathfrak{Y} \to \widetilde{\mathfrak{X}}$ tel que pour chaque $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ contenant $P^\natural$, l'application régulière

$$\tilde{\eta}_Q = \eta_Q \circ \tilde{\phi} : \mathfrak{Y} \to \mathcal{G}(M_Q)$$

composée avec la projection canonique $q_{Q,1} : \mathcal{G}(M_Q) \to \mathcal{G}_1(M_Q)$ se décompose en

$$q_{Q,1} \circ \tilde{\eta}_Q = \sum_{i=1}^{m(Q^\natural)} a_{Q^\natural,i}\, \mu^\circ_{Q^\natural,i}$$

où :

- $\mu_{Q^\natural,1},\ldots,\mu_{Q^\natural,m(Q^\natural)} : \mathfrak{Y} \to \mathrm{Irr}_0(M_Q^\natural,\omega)$ sont des applications régulières deux–à–deux $\mathbb{C}^\times$–disjointes ;
- $a_{Q^\natural,1},\ldots,a_{Q^\natural,m(Q^\natural)}$ sont des entiers > 0.

Posons $n = m(G^\natural)$ et $\mu_i = \mu_{G^\natural,i}$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Pour $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural) \smallsetminus \{G^\natural\}$ contenant $P^\natural$ et $i = 1,\ldots,m(Q^\natural)$, l'application

$$\nu_{Q,i} = i_Q^G \circ \mu^\circ_{Q^\natural,i} : \mathfrak{Y} \to \mathcal{G}(G)$$

est régulière. La famille des $\nu_{Q,i} : \mathfrak{Y} \to \mathcal{G}(G)$ obtenue en faisant varier $Q^\natural$ $(\neq G^\natural)$ et i de cette manière, est notée $\{\nu_1,\ldots,\nu_m\}$. L'ensemble des points $y \in \mathfrak{Y}$ tels que $\{\mu_1^\circ(y),\ldots,\mu_n^\circ(y)\}$ est contenu dans le sous–groupe de $\mathcal{G}_1(G)$ engendré par $q_1 \circ \nu_1(y),\ldots,q_1\circ\nu_m(y)$ est exactement l'image réciproque du complémentaire $(\mathfrak{X}\cap\Theta')^{\mathfrak{C}}$ de $\mathfrak{X}\cap\Theta'$ dans $\mathfrak{X}$ par le morphisme dominant étale

$$\phi = (\widetilde{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}) \circ \tilde{\phi} : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}.$$

On conclut grâce au corollaire de 5.4. Puisque Θ' vérifie la propriété $(*)$ de 5.3, c'est une partie constructible de Θ. Cela achève la démonstration de la proposition de 5.2.

5.6. Décomposition des espaces $\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)$ et $\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega)$.— Pour tout sous–ensemble Y de $\Theta(G)$, on note $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;Y)$ le sous–espace vectoriel de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ engendré par les $\Pi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$ tels que $\theta_{G^\natural}(\Pi) \in Y$. On a la décomposition

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;Y) = \bigoplus_y \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;y)$$

où y parcourt les éléments de l'ensemble $Y\cap\Theta_{G^\natural,\omega}(G)$. Dualement, pour $Y\subset\Theta(G)$, on note $\mathcal{F}_Y(G^\natural,\omega)$ le sous–espace vectoriel de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;Y)^*$ formé des restrictions à $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;Y)$ des éléments de $\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$, et pour $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{B}(G)$, on pose

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}_{\Theta(\mathfrak{S})}(G^\natural,\omega),\quad \Theta(\mathfrak{S})=\coprod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}}\Theta(\mathfrak{s}).$$

On a la décomposition

$$\mathcal{F}(G^\natural,\omega)=\bigoplus_{\mathfrak{s}}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega)$$

où $\mathfrak{s}$ parcourt les éléments de $\mathfrak{B}_{G^\natural,\omega}(G^\natural)$.

Remarque. — Pour $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)$, notant $z_{\mathfrak{s}}$ l'élément unité de l'anneau $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$, on a l'égalité $\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega)=z_{\mathfrak{s}}\cdot\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$. ■

Posons

$$\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(G)=\coprod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)}\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s}).$$

Pour $Y\subset\Theta(G)$, on note $\mathcal{G}^{\mathrm{dis}}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;Y)$ la projection de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;Y)$ sur $\mathcal{G}^{\mathrm{dis}}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)$, et l'on pose

$$\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_Y(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}_Y(G^\natural,\omega)\cap\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)\subset\mathcal{G}^{\mathrm{dis}}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;Y)^*.$$

Pour $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{B}(G)$, on pose

$$\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathfrak{S}}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\Theta(\mathfrak{S})}(G^\natural,\omega).$$

Puisque $\mathcal{G}^{\mathrm{dis}}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*\subset\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(G))^*$, on a la décomposition

$$\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)=\bigoplus_{\mathfrak{s}}\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega)$$

où $\mathfrak{s}$ parcourt les éléments de l'ensemble $\mathfrak{B}^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(G)=\beta_{G^\natural}(\mathrm{Irr}^{\mathrm{dis}}_0(G^\natural,\omega))$ — le sous–ensemble de $\mathfrak{B}(G)$ formé des $\mathfrak{s}$ tels que $\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$ est non vide.

En remplaçant $\mathcal{F}(G^\natural,\omega)$ par $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega)$, on définit de la même manière le sous–espace $\mathcal{F}_{\mathrm{tr},Y}(G^\natural,\omega)$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;Y)^*$ (pour $Y\subset\Theta(G)$), et l'on pose $\mathcal{F}_{\mathrm{tr},\mathfrak{S}}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}_{\mathrm{tr},\Theta(\mathfrak{S})}(G^\natural,\omega)$ (pour $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{B}(G)$). On a la décomposition

$$\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega)=\bigoplus_{\mathfrak{s}}\mathcal{F}_{\mathrm{tr},\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega)$$

où $\mathfrak{s}$ parcourt les éléments de $\mathfrak{B}_{G^\natural,\omega}(G)$. De même, posant

$$\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathrm{tr},Y}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}_{\mathrm{tr},Y}(G^\natural,\omega)\cap\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega),\quad Y\subset\Theta(G),$$

et

$$\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathrm{tr},\mathfrak{S}}(G^\natural,\omega)=\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathrm{tr},\Theta(\mathfrak{S})}(G^\natural,\omega),\quad \mathfrak{S}\subset\mathfrak{B}(G),$$

on a la décomposition

$$\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathrm{tr}}(G^\natural,\omega)=\bigoplus_{\mathfrak{s}}\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathrm{tr},\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega)$$

où $\mathfrak{s}$ parcourt les éléments de $\mathfrak{B}^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(G)$.

Pour démontrer la surjectivité dans le théorème de 4.8, il suffit de montrer que pour chaque $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(G)$, l'inclusion

$$\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathrm{tr},\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega)\subset\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega)$$

est une égalité.

Le lemme suivant est impliqué par la propriété d'indépendance linéaire des caractères–distributions des ω–représentations G–irréductibles de $G^\natural$ [**L2**, 8.5, prop.].

Lemme. — *Pour tout sous–ensemble fini Y de $\Theta(G)$, on a l'égalité*

$$\mathcal{F}_{\mathrm{tr},Y}(G^\natural,\omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;Y)^*.$$

Notons que si le groupe $\mathfrak{P}(G^\natural)$ est fini, alors pour chaque $\mathfrak{s}$ l'ensemble $\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$ est fini (proposition de 5.2), et d'après le lemme on a l'égalité cherchée :

$$\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathrm{tr},\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega) = \mathcal{G}^{\mathrm{dis}}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;\Theta(\mathfrak{s}))^* = \mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathfrak{s}}(G^\natural,\omega).$$

5.7. Surjectivité dans le théorème de 4.8.— L'idée consiste à se ramener au lemme de 5.6, comme dans [**BDK**, 4.2].

Rappelons que A_G est le tore central déployé maximal de G. Choisissons une uniformisante ϖ de F et identifions le groupe $\mathrm{Hom}(A_G^\varpi,\mathbb{C}^\times)$ à $\mathfrak{P}(A_G)$ comme dans l'exemple de 2.11. Pour $u\in\mathcal{H}(A_G)$, on note $z(u)$ l'élément de $\mathfrak{Z}(G)$ défini par

$$z(u)_\pi = \int_{A_G} u(a)\pi(a)da,\quad \pi\in\mathrm{Irr}(G);$$

où da est la mesure de Haar sur A_G qui donne le volume 1 à A_G^1. L'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{P}(A_G)]$ des fonctions régulières sur la variété $\mathfrak{P}(A_G)$, identifiée à l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[A_G^\varpi]$, est une sous–algèbre de $\mathcal{H}(A_G)$; d'où un morphisme d'algèbres $\mathbb{C}[\mathfrak{P}(A_G)]\rightarrow\mathfrak{Z}(G)$. Pour chaque $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)$, on peut composer ce morphisme d'algèbres avec la projection canonique $\mathfrak{Z}(G)\rightarrow\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$. Le morphisme de variétés correspondant $\eta_\mathfrak{s}:\Theta(\mathfrak{s})\rightarrow\mathfrak{P}(A_G)$ est donné par

$$\eta_\mathfrak{s}(\theta_G(\pi)) = \omega_\pi|_{A_G^\varpi},\quad \pi\in\beta_G^{-1}(\mathfrak{s}).$$

Notons que ce morphisme $\eta_\mathfrak{s}$ est $\mathfrak{P}(G)$–équivariant pour l'action (algébrique) de $\mathfrak{P}(G)$ sur $\mathfrak{P}(A_G)$ donnée par $(\psi,\chi)\mapsto(\psi|_{A_G})\chi$, pour $\psi\in\mathfrak{P}(G)$ et $\chi\in\mathfrak{P}(A_G)$.

Comme pour A_G, on identifie le groupe $\mathrm{Hom}(A^\varpi_{G^\natural},\mathbb{C}^\times)$ à $\mathfrak{P}(A_{G^\natural})$; où (rappel) $A_{G^\natural}$ est le tore déployé maximal du centre $Z^\natural$ de $G^\natural$. L'action de $\mathfrak{P}(G)$ sur $\mathfrak{P}(A_G)$ induit par restricion une action (algébrique) de $\mathfrak{P}(G^\natural)$ sur $\mathfrak{P}(A_{G^\natural})$. L'application $\mathfrak{P}(G^\natural)\rightarrow\mathfrak{P}(A_{G^\natural})$, $\psi\mapsto\psi|_{A_{G^\natural}}$ est un morphisme surjectif de groupes algébriques, de noyau fini (cf. 4.3). En particulier c'est un morphisme fini, donc étale (puisqu'il est lisse).

Fixons $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(G)$ et posons $Y=\Theta^{\mathrm{dis}}_{G^\natural,\omega}(\mathfrak{s})$. Posons aussi $\mathfrak{X}=\mathfrak{P}(A_{G^\natural})$. Par restriction, $\eta_\mathfrak{s}$ induit une application $\mathfrak{P}(G^\natural)$–équivariante $\eta_Y:Y\rightarrow\mathfrak{X}$, donnée par

$$\eta_Y(\theta_{G^\natural}(\Pi)) = \omega_\Pi|_{A^\varpi_{G^\natural}},\quad \Pi\in\theta^{-1}_{G^\natural}(Y).$$

Pour $\Pi\in\theta^{-1}_{G^\natural}(Y)$ et $\psi\in\mathfrak{P}(G^\natural)$, elle vérifie

$$\eta_Y(\psi\cdot\theta_{G^\natural}(\Pi)) = \psi|_{A_{G^\natural}}\cdot\eta_Y(\theta_{G^\natural}(\Pi)).$$

Comme Y est union d'un nombre fini de $\mathfrak{P}(G^\natural)$–orbites (proposition de 5.2), et que pour chacune de ces orbites le stabilisateur dans $\mathfrak{P}(G^\natural)$ est fini, l'application η_Y est un morphisme fini étale de variétés algébriques affines lisse. Ainsi le comorphisme $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]\rightarrow\mathbb{C}[Y]$ fait de $\mathbb{C}[Y]$ un $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$–module de type fini. En particulier, l'espace $\mathcal{E}_Y=\mathcal{G}^{\mathrm{dis}}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega;Y)^*$ est un $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$–module de type fini pour l'action de $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ donnée par ($\varphi\in\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$, $\Phi\in\mathcal{E}_Y$, $\Pi\in\theta^{-1}_{G^\natural}(Y)$)

$$(\varphi\cdot\Phi)(\Pi) = \varphi(\omega_\Pi|_{A^\varpi_{G^\natural}})\Phi(\Pi).$$

En d'autres termes, $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ opère sur $\mathcal{E}_Y$ via le morphisme d'algèbres $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]\rightarrow\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}$, $\varphi\mapsto z_\varphi$ donné par $(z_\varphi)_{\Pi^\circ}=\varphi(\omega_\Pi|_{A^\varpi_{G^\natural}})\mathrm{id}_{V_\Pi}$ pour tout objet irréductible Π de $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural,\omega)$, cf. 2.18. On en déduit que les espaces $\mathcal{F}_Y=\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_Y(G^\natural,\omega)$ et $\mathcal{F}'_Y=\mathcal{F}^{\mathrm{dis}}_{\mathrm{tr},Y}(G^\natural,\omega)$ sont des sous–$\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$–modules de $\mathcal{E}_Y$. L'action de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$ sur $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural,\omega)^*$ définie en 4.5 induit une action sur $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{dis}}(G^\natural,\omega)^*$, et les espaces $\mathcal{E}_Y$, $\mathcal{F}_Y$ et $\mathcal{F}'_Y$ sont stables pour cette action.

Soit $x\in\mathfrak{X}$ correspondant à $u:\mathbb{C}[\mathfrak{X}]\rightarrow\mathbb{C}$. Pour tout $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$–module E, on note E_x la fibre $E\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{X}],u}\mathbb{C}$ de E au–dessus de x. Comme le morphisme $\eta_Y:Y\rightarrow\mathfrak{X}$ est fini et lisse, l'ensemble $Y_x=\eta_Y^{-1}(x)$ est fini et la fibre $\mathbb{C}[Y]_x$ coïncide avec $\mathbb{C}[Y_x]$, i.e. la « fibre géométrique » au–dessus de x est régulière. D'après le lemme de 5.6, on a l'égalité $\mathcal{F}'_{Y_x}=\mathcal{E}_{Y_x}$. En d'autres termes, posant $\mathfrak{p}_x=\ker u$, on a l'inclusion

$$\mathcal{F}_Y\subset\mathcal{F}'_Y+\mathfrak{p}_x\cdot\mathcal{E}_Y.$$

Posons $\overline{\mathcal{E}}=\mathcal{E}_Y/\mathcal{F}'_Y$ et $\overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}_Y/\mathcal{F}'_Y\subset\overline{\mathcal{E}}$. D'après l'inclusion ci–dessus, on a $\overline{\mathcal{F}}\subset\mathfrak{p}_x\cdot\overline{\mathcal{E}}$ pour tout $x\in\mathfrak{X}$. Puisque $\overline{\mathcal{E}}$ est un $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$–module de type fini, il est localement libre en presque tout point de $\mathfrak{X}$. Comme d'après le lemme 2 de 4.5, $\overline{\mathcal{E}}$ est $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$–équivariant, il est localement libre en tout point de $\mathfrak{X}$, et l'inclusion $\overline{\mathcal{F}}\subset\mathfrak{p}_x\cdot\overline{\mathcal{E}}$ $(x\in\mathfrak{X})$ implique que $\overline{\mathcal{F}}=0$; ce qu'on voulait démontrer.

Références

[BD] Bernstein J. & Deligne P., *Le « centre » de Bernstein* in Représentations des groupes réductifs sur un corps local (ed. Bernstein J., Deligne P., Kazhdan D., Vignéras M.–F.), Travaux en Cours, Hermann, 1984.

[BDK] Bernstein J., Deligne P. & Kazhdan D., *Trace Paley–Wiener theorem for reductive p–adic groups*, J. Analyse Math. **47** (1986), pp. 180–192.

[BT] Bruhat F., Tits J., *Groupes réductifs sur un corps local II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Pub. Math. IHES **60** (1984), pp. 1–184.

[BZ] Bernstein J., Zelevinsky A., *Induced representations of reductive p–adic groups I*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **10** (1977), pp. 441–472.

[BW] Borel A., Wallach N., *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Ann. Math. Studies **94**, Princeton U. Press, Princeton, NJ, 1980.

[C] Casselman R., *Characters and Jacquet modules*, Math. Ann. **230** (1977), pp. 101–105.

[D] Dat J.–F., *On the K_0 of a p–adic group*, Invent. Math. **140** (2000), pp. 171–226.

[F] Flicker Y., *Bernstein's isomorphism and good forms*, Proc. Symp. Pure Math. **58** (1995), pp. 171–196.

[G] Gabriel P., *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), pp. 323–448.

[HL] Henniart G., Lemaire B., *La transformée de Fourier pour les espaces tordus sur un groupe réductif $\mathfrak{p}$–adique, II. Le théorème de densité spectrale*, mansucript.

[K1] Kazhdan D., *Cuspidal geometry of p–adic groups*, J. Analyse Math. **47** (1986), pp. 1–36.

[K2] Kazhdan D., *Representations of groups over close local fields*, J. Analyse Math. **47** (1986), pp. 175–179.

[L1] Lemaire B. *Représentations génériques de GL_N et corps locaux proches*, J. Algebra **236** (2001), pp. 549–574.

[L2(2010)] Lemaire B. *Caractères tordus des représentations admissibles*, prépublication arXiv : 1007.3576v1 [math.RT], 21 juillet 2010.

[L2] Lemaire B. *Caractères tordus des représentations admissibles*, version remaniée et complétée de [**L2(2010)**], manuscript.

[R] Rogawski J., *Trace Paley–Wiener theorem in the twisted case*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1998), pp. 215–229.

[W] Waldspurger J.–L., *La formule des traces locale tordue*, prépubication arXiv : 1205.1100v2 [math. RT], 13 septembre 2012.

---

11 septembre 2013

Guy Henniart, Université Paris–Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS, F–91405 Orsay Cedex • *E-mail :* `Guy.Henniart@math.u-psud.fr`

Bertrand Lemaire, Institut de Mathématiques de Luminy et UMR 6206 du CNRS, Université Aix–Marseille II, Case Postale 907, F–13288 Marseille Cedex 9 • *E-mail :* `lemaire@iml.univ-mrs.fr`